

1. **Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:**

a) $A \cap \bar{B} \cap \bar{A} \cap B = (A \cap \bar{A}) \cap (B \cap \bar{B}) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) =$
 $= [A \cap (B \cup \bar{B})] \cup [\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})] = (A \cap H) \cup (\bar{A} \cap H) = A \cup \bar{A} = H$

c) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup B = \emptyset \cup B = B$

2. **Igazak-e a következő halmazos kifejezések?**

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$

$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = [A \cup (B \cap \bar{B})] \cap [\bar{A} \cup (B \cap \bar{B})] =$
 $= (A \cup \emptyset) \cap (\bar{A} \cup \emptyset) = A \cap \bar{A} = \emptyset$ igaz

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) =$
 $= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ igaz

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = (A \cap \bar{B}) \cap \bar{C} = (A \setminus B) \setminus C$

3. **Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:**

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$

$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap H = A$

4. **Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:**

$A = A \cup (A \cap B)$

$A \cup (A \cap B) = (A \cap H) \cup (A \cap B) = A \cap (H \cup B) = A \cap H = A$

5. **Milyen kapcsolat áll fent A és B között, ha $A \cup (B \cap \bar{A}) = B$ igaz?**

$A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap H = A \cup B$

Ha $A \cup B = B$, akkor az $A \subset B$.

6. **Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:**

$A \setminus (A \cap B) \cup B = A \cup B$

$A \setminus (A \cap B) \cup B = (A \cap \overline{A \cap B}) \cup B = A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup B =$

$(A \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup B) = (A \cup B) \cap H = A \cup B$

7. **Egyszerűsítsük a következő kifejezést:**

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) =$

$(A \cap \bar{A}) \cup B \cap (A \cup \bar{B}) = B \cap (A \cup \bar{B}) = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{B}) = B \cap A$

8. Bizonyítsuk be:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

9. Igaz-e a következő állítás?

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \stackrel{?}{=} B$$

$$[(A \cup \overline{A}) \cap B] \cup (A \cap \overline{B}) = (H \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (H \cup A) \cap B = H \cap B = B$$

10. Lássa be a halmazműveletekre vonatkozó azonosságok felhasználásával a következő egyenlőséget!

$$(A \setminus B) \setminus C \stackrel{?}{=} (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

$$\begin{aligned} (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} = A \cap \overline{C} \cap (\overline{B} \cup C) = \\ &= A \cap [(\overline{C} \cap \overline{B}) \cup (\overline{C} \cap C)] = A \cap \overline{C} \cap \overline{B} = (A \setminus B) \setminus C \end{aligned}$$

11. Legyen

$$A = \{a, b, g\} \quad B = \{c, d, g\} \quad C = \{d, e, f, g\}$$

$$H = \{a, b, c, d, e, f, g\} \text{ a teljes halmaz.}$$

Mik lesznek a következő halmazok elemei?

a) $\overline{A} \cap B = \{c, d\}$

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \{a, b, c, d, e, f\}$, mert $A \cap B \cap C = \{g\}$

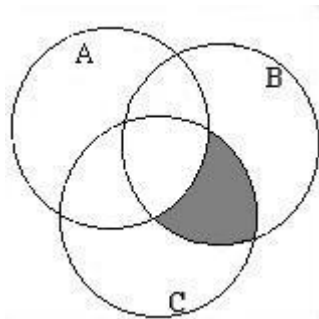
c) $\overline{A \cap B} \cap C = \{d, e, f\}$

d) $\overline{A \cap B \cap C} = \{a, b, c, d, e, f\}$

e) $\overline{A \cup B} \cap \overline{C} = \emptyset$

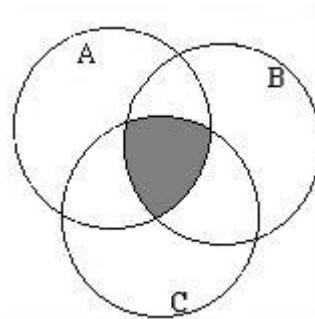
f) $A \cup B \cup C = H$

12. Adottak a következő Venn-diagramok. Írjuk fel a sátrózott halmazokat!



$$B \cap C \setminus A$$

és



$$A \cap B \cap C$$

13. Legyenek:

$$A = \{x \mid 2 < x < 5\}$$

$$B = \{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$$

Milyen halmazokat eredményeznek az alábbi műveletek?

$$A \cap B = \{x | 3 \leq x < 5\} \quad [3;5[$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{x | x \leq 2 \text{ vagy } x > 7\} \quad]-\infty;2] \cup]7;\infty[$$

$$A \cup B = \{x | 2 < x \leq 7\} \quad]2;7]$$

$$A \cap \bar{B} = \{x | 2 < x < 3\} \quad]2;3[$$

14. Legyen $A = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$ $B = \{x | 3 < x \leq 10\}$.

Milyen halmazokat eredményeznek az alábbi műveletek?

a) $A \cap B = \{x | 3 < x \leq 5\}$

b) $\bar{A} \cap \bar{B} = \{x | x < 2; x > 10\}$

c) $\overline{A \cup B} = \{x | x < 2; x > 10\}$

d) $\overline{A \cap B} = \{x | x \leq 3; x > 5\}$

e) $\bar{A} \cup \bar{B} = \{x | x \leq 3; x > 5\}$

f) $A \cup B = \{x | 2 \leq x \leq 10\}$

15. Legyen 3 halmaz a következő:

$A =$ ALMA szó betűi

$B =$ BANÁN szó betűi

$C =$ CITROM szó betűi

Mekkora a 3 halmaz számossága?

$$|A| = 3$$

$$|B| = 4$$

$$|C| = 6$$

Milyen elemei vannak az alábbi halmaznak?

$$(A \cup B) \setminus C = \{BÁLNA\}$$

$$B \setminus A = \{BÁN\}$$

Mik lesznek $B \setminus A$ halmaz részhalmazai?

$$\emptyset \quad \{Á\} \quad \{B\} \quad \{N\} \quad \{BN\} \quad \{BÁ\} \quad \{NÁ\} \quad \{BÁN\}$$

16. Legyen $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ $B = \{a, c, d, x, y, z\}$

Képezzük az $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \circ B$ halmazokat!

17. Legyen

H , a 30-nál nem nagyobb természetes számok halmaza;

M , a páros H -beli számok halmaza;

N , a hárommal osztható H -beli számok halmaza;

P , a H -beli prímszámok halmaza.

a) **Hány eleme van $M \cap P$ halmaznak?**

- b) *Hány eleme van $N \cap P$ halmaznak?*
 c) *Hány eleme van $M \cap N$ halmaznak?*
 d) *Mondjon olyan számot, ami nem eleme $M \cup N \cup P$ -nek.*

18. *Legyen $A=]1,3[$ $B=[2,4]$ $C=[3,5]$ $D=[1,5[$
 Határozza meg az alábbi halmazokat!*

$$R1 := (A \cap B)$$

$$R2 := (A \cap C)$$

$$R3 := D \setminus (A \cap B)$$

$$R4 := (B \cap C)$$

$$R5 := (A \setminus B)$$

$$R6 := D \setminus (A \cup B)$$

19. *Legyen az alaphalmaz: $H : \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x < 25\}$ és az ezen értelmezett A, B, C halmazok az alábbiak:*

$$A = \{x \in H | x \text{ páros}\}$$

$$B = \{x \in H | x \text{ egyjegyű szám}\}$$

$$C = \{8, 9, 10, 11, 12\}$$

Határozza meg az $R1 = (A \cap B) \setminus C$

$$R2 = (A \cup B) \cap (\overline{A \setminus C})$$

$$R3 = \overline{\overline{C \cup B}} \text{ halmazok elemeit és számosságát !}$$

20. *Legyen az A halmaz a 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, a B pedig a 3-mal osztható, 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Adja meg a következő halmazokat és azok számosságát!*

$$A \cup B = \quad |A \cup B| =$$

$$A \cap B = \quad |A \cap B| =$$

$$A \setminus B = \quad |A \setminus B| =$$

$$B \setminus A = \quad |B \setminus A| =$$

21. *Igazak-e az alábbi állítások a halmazműveletekre vonatkozóan? A kipontozott részre írja a megfelelő igaz vagy hamis minősítést! (A, B halmazok)*

$$A \circ A = \emptyset \quad \dots\dots\dots$$

$$(A \setminus B) \cup B = A \cap B \quad \dots\dots\dots$$

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset \quad \dots\dots\dots$$