***Dr Strauber Györgyi - Sóti lászlóné***

# *A számítástudomány alapjai. I.*

***Gyakorlati feladatok gyüjteménye.***

## *Bevezetés*

*Ez a gyakorlati feladatgyüjtemény a* ***Számítástudomány alapjai I.*** *jegyzet kiegészítője. Tartalmazza a gyakorlati órákon elhangzó témakörök feladatait, segítve ezzel az órai munkát és a hallgatók otthoni tanulását. A megoldása nem minden feladatnak szerepel, de a fontosabb alapfeladatok minden témakörben kidolgozottak. Témánként először a feladatok felsorolása található meg, majd azok magoldása. A példatár végére került egy gyakorlati zárthelyi feladatsor, majd egy vizsgadolgozat a megfelelő pontozással.*

*2009. február 1.*

***Tartalom***

*1. Számrendszerek ........................................................................4*

*1.1.Feladatok ........................................................................6*

*1.2.Megoldások ........................................................................8*

*2. Halmazok........................................................................15*

*2.1.Feladatok ........................................................................15*

*2.2.Megoldások ........................................................................22*

*3. Ítéletek ........................................................................27*

*3.1.Feladatok ........................................................................27*

*3.2.Megoldások ........................................................................36*

*4. Relációk ........................................................................43*

*4.1.Feladatok ........................................................................43*

*4.2.Megoldások ........................................................................47*

*5. Függvények........................................................................52*

*5.1.Feladatok ........................................................................52*

*5.2.Megoldások ........................................................................57*

*6. A számfogalom bővítése ........................................................................62*

*6.1.A teljes indukció ........................................................................62*

*6.2.Feladatok ........................................................................65*

*7. Számonkérések ........................................................................66*

*Irodalomjegyzék ........................................................................69*

## 1. Számrendszerek

*Ez az anyagrész az előadáson nem hangzik el, csak a gyakorlaton foglalkozunk a témával, ezért a többi fejezettől eltérően kis összefoglalót adunk hozzá.*

*A helyiértékes számábrázolás szabályai szerint bármely értéket az általunk használt tizes számrendszertől eltérő, más számrendszerben is ábrázolhatunk.*

*Egy tizes számrendszerbeli szám mit is jelent?*

$$5463.48$$

*Ez azt jelenti, hogy 5 db ezres, 4 db százas 6 db tizes és 3 db egyes, valamint 4 tized és 8 század összege. Ha ezt felírjuk:*

$$5*10^3+4*10^2+6*10+3*1+4*10^{-1}+8*10^{-2}$$

*Tehát a tizedesponttól való távolság meghatározza, hogy tíz hányadik hatványával kell szorozni az azon a helyen lévő számjegyet.*

*Általában egy szám „p”-számrendszerben a következőképpen írható le:*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot p^i \qquad ahol\ 0 \le a_i < p \quad \forall\ i\ esetén$$

*Ugyanez tizes számrendszerben:*

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^i \qquad ahol\ 0 \le a_i < 10 \quad \forall\ i\ esetén$$

*azaz*

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ...a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_{-3} \cdot 10^{-3}$$

*Tehát a helyiértékek mindig az alapszám hatványai.*

*Ha tizesnél nagyobb alapszámú számrendszert használunk a további számjegyeket az abécé betűivel jelöljük, például A=10, B=11 stb.*

*A számítógépek minden adatot kettes számrendszer szerint tárolnak, ezért olyan eljárások kidolgozása vált szükségessé, amelyek az ember által használt számokat és betűket bináris jelek formájára képesek kódolni és dekódolni.*

*A leggyakrabban használt számrendszer a bináris, azaz a 2 alapú számrendszer. A bináris, az oktális (nyolcas) és a hexadecimális (tizenhatos) számrendszerek nagyon szoros összefüggésben vannak hiszen a 2 harmadik hatványa éppen 8, és a negyedik hatványa éppen 16, ezért a bináris számot ha hármasával (triádok) vagy négyesével (tetrádák) beosztjuk, közvetlenül leolvasható lesz a szám oktális illetve hexadecimális alakja. Ezt gyakran ki is használjuk az átalakítások során.*

*A 2-es, 16-os és a 8-as számrendszerbeli átváltáshoz néhány segéd táblázat:*

| ***Tizes számrendszer*** | ***Bináris számrendszer*** | ***Oktális számrendszer*** | ***Hexadecimális számrendszer*** |
|---|---|---|---|
| *0* | *0000* | *0* | *0* |
| *1* | *0001* | *1* | *1* |
| *2* | *0010* | *2* | *2* |
| *3* | *0011* | *3* | *3* |
| *4* | *0100* | *4* | *4* |
| *5* | *0101* | *5* | *5* |
| *6* | *0110* | *6* | *6* |
| *7* | *0111* | *7* | *7* |
| *8* | *1000* | *10* | *8* |
| *9* | *1001* | *11* | *9* |
| *10* | *1010* | *12* | *A* |
| *11* | *1011* | *13* | *B* |
| *12* | *1100* | *14* | *C* |
| *13* | *1101* | *15* | *D* |
| *14* | *1110* | *16* | *E* |
| *15* | *1111* | *17* | *F* |

*Az átalakításokhoz szükségesek az alapszámok hatványai ezért ezeket is magadjuk, a könnyebb számolás végett.*

| | | |
|---|---|---|
| $2^0 =$ | 1 | $2^{-1} = 0{,}5$ |
| $2^1 =$ | 2 | $2^{-2} = 0{,}25$ |
| $2^2 =$ | 4 | $2^{-3} = 0{,}125$ |
| $2^3 =$ | 8 | $2^{-4} = 0{,}0625$ |
| $2^4 =$ | 16 | $2^{-5} = 0{,}03125$ |
| $2^5 =$ | 32 | $2^{-6} = 0{,}015625$ |
| $2^6 =$ | 64 | |
| $2^7 =$ | 128 | |
| $2^8 =$ | 256 | |
| $2^9 =$ | 512 | |
| $2^{10} =$ | 1024 | |
| $2^{11} =$ | 2048 | |
| $2^{12} =$ | 4096 | |

| | | |
|---|---|---|
| $8^0 =$ | 1 | $8^{-1} = 0{,}125$ |
| $8^1 =$ | 8 | $8^{-2} = 0{,}015625$ |
| $8^2 =$ | 64 | $8^{-3} = 0{,}001953$ |
| $8^3 =$ | 512 | $8^{-4} = 0{,}000244$ |
| $8^4 =$ | 4096 | |
| | | |
| $16^0 =$ | 1 | $16^{-1} = 0{,}0625$ |
| $16^1 =$ | 16 | $16^{-2} = 0{,}0039$ |
| $16^2 =$ | 256 | |
| $16^3 =$ | 4096 | |
| $16^4 =$ | 65536 | |
| | | |
| | | |

*A számrendszerek közötti (átalakításokat) konverziókat példákon keresztül mutatjuk be, csak megoldásaikat kicsik részletesebb magyarázattal látjuk el.*

## <u>1.1</u> *Feladatok*

**1.** ***Alakítsuk át a következő decimális számot binárisba!***

*a.)* $57.4375_{10}$

*b.)* $3492.326_{10}$

**2.** ***Alakítsuk át a következő bináris számot decimálisba!***

*a.)* $11111001110.1011_2$

*b.)* $1011001.1101_2$

**3.** ***Alakítsuk át a következő decimális számot oktálisra!***

*a.)* $579.18_{10}$

*b.)* $1998_{10}$

**4.** ***Mi lesz a következő oktális szám értéke decimálisban?***

*a.)* $1103.1341_8$

*b.)* $3716.4_8$

**5.** ***Alakítsuk át a következő bináris számot***

*a.)* *közvetlenül oktálisba*

$1001000011.0010111_2$

**b).** ***Alakítsuk át a következő oktális számot közvetlenül binárisba!***

$14765.56_8$

**6.** ***Mi lesz a következő decimális számok hexadecimális alakja?***

*a.)* $579.18_{10}$

*b.)* $1998_{10}$

**7.** ***Alakítsuk át a következő hexadecimális számokat decimálisra!***

*a.)* $7CE_{16}$

*b.)* $2AB.E1_{16}$

**8.** ***Alakítsuk át a következő bináris számot közvetlenül hexadecimálisba!***

$1001000010.0010111_2$

**9.** ***Adjuk össze a $749_{10}$, a $46_{10}$ és a $27_{10}$ számokat kettes nyolcas és tizenhatos számrendszerben!***

**10.** ***Hajtsuk végre a $1011101101_2 – 11011111_2$ kivonást!***

***Végezzük el a feladatot komplemens szám segítségével is.***

**11.** ***Komplemens szám segítségével végezzük el a következő kivonásokat!***

***A feladatokat bináris ésa hexadecimális számrendszerben is végezzük el!***

*a.)* $698_{10}$ - $482_{10}$

*b.)* $749_{10}$ - $223_{10}$

*c.)* $5330_{10}$ - $3733_{10}$

*d.)* $3795_{10}$ - $757_{10}$

**12.** ***Komplemens kivonással végezze el 16-os számrendszerben a következő kivonást:***

$698_{10} – 482_{10}=$

**13.** ***Végezze el a következő konverziókat! Jelölje a táblázatban a megfelelő helyen!***

| ***Hexadecimális*** | ***decimális*** | ***bináris*** | ***oktális*** |
|---|---|---|---|
| ***3F2.EB*** | | | |

**14.** ***Végezze el a lehetséges konverziókat! Jelölje a táblázatban a megfelelő helyen!***

| ***Bináris*** | ***decimális*** | ***oktális*** | ***hexadecimális*** |
|---|---|---|---|
| ***11001.1101*** | | | |

**15.** ***Komplemens kivonással végezze el kettes számrendszerben a következő kivonást:***

$7754_8 – 4563_8=$

**16.** ***Komplemens kivonással végezze el kettes számrendszerben a következő kivonást:***

$591_{10} – 324_{10}=$

**17.** ***Adja össze az alábbi két számot kettes számrendszerben:***

$100101_2 + 101110_2 =$

**18.** ***Töltse ki a kipontozott részeket a megfelelő szóval vagy betűvel, számmal.***

*A* $7D_{16}$ *kettes számrendszerbeli alakja: …………………………………*

*A* $0.4_{16}$ *tizes számrendszerbeli alakja: . …………………………………*

**19.** ***Vonja ki az alábbi két számot hexadecimális számrendszerben:***

$D81_{16} – 7E4_{16} =$

## 1.2 Megoldások.

### 1. ***Decimálisból bináris számrendszerbe való átalakítás:***

***a.) $57{,}4375_{10}$=?***

*Tizes számrendszerből bármely számrendszerbe átválthatunk úgy, hogy a számrendszer váltószámait a megfelelő szorzótényezőkkel megszorozzuk. Ennél jobb, szisztematikusabb módszer a maradékos osztás. Emlékeztetőül a maradékos osztás algoritmusa: a tizes számrendszerbeli számot elosztjuk az átalakítandó számrendszer alapszámával, az osztás eredményeit, valamint a maradékot egymás alá írjuk. Amikor az osztás végére érünk, a maradékokat visszafelé, alulról felfelé egymás mellé írjuk.*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *osztás:* | *57:2=28* | *28:2=14* | *14:2=7* | *7:2=3* | *3:2=1* | *1:2=0* |
| *maradék:* | *1* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* |

*Táblázatosan:*

| *hányados :8* | *maradék* |
|---|---|
| 57 | 1 |
| 28 | 0 |
| 14 | 0 |
| 7 | 1 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | |

*a maradékokat visszafelé írva:* $111001_2$

*A szám törtrészének kiszámításához az algoritmus a következő:*

*A törtrészt megszorozzuk 2-vel, az eredményt úgy írjuk le, hogy a szám egészrésze a bal oldalra kerül. Majd ismét csak a törtrészt szorozzuk 2-vel, és megint az egészrész a baloldalra kerül A művelet tetszőleges sok lépésen keresztül végezhető. Minél tovább folytatjuk, az eredmény annál pontosabb lesz. A művelet akkor ér véget, amikor a törtrész 5 tized lesz, vagy megelégszünk bizonyos jegynyi pontossággal. Az eredményt az egész részen megjelenő számok adják, a vonal bal oldalán rendes sorrendben.*

| 0, | 4375*2 |
|---|---|
| 0 | 8750 |
| 1 | 750 |
| 1 | 50 |
| 1 | 0 |

*Tehát* $57.4375_{10}=111001.0111_2$

**b.)** ***3492,326$_{10}$=?***

| *Hányados* | *:2 maradék* |
|---:|:---|
| 3492 | 0 |
| 1746 | 0 |
| 873 | 1 |
| 436 | 0 |
| 218 | 0 |
| 109 | 1 |
| 54 | 0 |
| 27 | 1 |
| 13 | 1 |
| 6 | 0 |
| 3 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | |

| *0,* | *326*·2* |
|---:|:---|
| 0 | 652 |
| 1 | 304 |
| 0 | 608 |
| 1 | 212 |
| 0 | 432 |
| 0 | 864 |
| 1 | 728 |
| | stb. |

*3492,326$_{10}$=110110100100,0101001$_2$*

## 2. *A bináris számrendszerből való visszaalakítás decimálisba:*

***11111001110.1011$_2$=?***

*Használjuk a megadott hatvány értékeket!*

**a)**

| $2^{10}$ | $2^9$ | $2^8$ | $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | | $2^{-1}$ | $2^{-2}$ | $2^{-3}$ | $2^{-4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | • | 1 | 0 | 1 | $1_2$ |

$$1\cdot 2^{10}+1\cdot 2^9+1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}$$

$$1\cdot 1024+1\cdot 512+1\cdot 256+1\cdot 128+1\cdot 64+1\cdot 8+1\cdot 4+1\cdot 2=1998$$

$$1\cdot 0{,}5+1\cdot 0{,}125+1\cdot 0{,}0625=0{,}6875$$

*Tehát a fenti bináris szám* $11111001110\cdot 1011_2=1998{,}6875_{10}$

**b)** ***1011001,1101$_2$=?***

$$1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^1+1+1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}=$$

*=64+16+8+1+0,5+0,25+0,0625 =89,8125*

$1011001{,}1101_2=89{,}8125_{10}$

## 3. *Alakítsuk át a decimális számot oktálissá.*

**a)** ***579,18$_{10}$=?***

*Az új számrendszer alapjával (8-al) kell megint osztanunk és a maradékokat visszafelé felírni, tizedes értékeket pedig szorozni kell az alapszámmal (8-al) és az egész részeket rendes sorrendben felírni.*

*Táblázatosan írva*

| *Hányados:8* | *maradék* |
|---|---|
| *579* | *3* |
| *72* | *0* |
| *9* | *1* |
| *1* | |

| *0,* | *18 *8* |
|---|---|
| *1* | *44* |
| *3* | *52* |
| *4* | *16* |
| *1* | *28* |
| | *stb* |

*Tehát* $579{,}18_{10}=1103{,}1341_8$

**b)** $\mathbf{1998_{10}=?}$

| *Hányados:8* | *maradék* |
|---|---|
| *1998* | *6* |
| *249* | *1* |
| *31* | *7* |
| *3* | *3* |
| *0* | |

$=3716_8$

**4.** ***Az oktális számrendszerből decimálisba való visszaalakítás***

*Ismét szükségünk lesz a hatványok értékeire.*

**a.)** $\mathbf{1103.1341_8=?}$

| $8^3$ | $8^2$ | $8^1$ | $8^0$ | | $8^{-1}$ | $8^{-2}$ | $8^{-3}$ | $8^{-4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 3 | • | 1 | 3 | 4 | 1 |

*3*512+1*64+3*1+1*0.125+3*0.015625+4*0.001953+1*0.00024 =579.1796*

**b.)** $\mathbf{3716.4_8\ =?}$

| $8^3$ | $8^2$ | $8^1$ | $8^0$ | | $8^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 1 | 6 | • | 4 |

*3*512+7*64+1*8+6*1+4*0.125 = 1998.5*

**5.** ***a.) Alakítsuk át következő bináris számot közvetlenül oktálisba:***

$\mathbf{1001000011.0010111_2=?}$

*Vegyük észre az oktális és bináris számrendszerek közti közvetlen összefüggést. Ha hármasával (triádok) vesszük a bináris számot, közvetlenül leolvasható az oktális érték. Hiszen* $2^3=8$ *és* $2^6=8^2$ *stb. Használjuk a fejezet elején megadott táblázatot!*

*FONTOS: Amikor hármasával beosztjuk a számot, a tizedes (bináris) ponttól kell jobbra és balra indulni!!! Ha nincs ki a 3 jegy, ki kell egészíteni.*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***00**1* | *001* | *000* | *011* | • | *001* | *011* | ***100**$_2$* |
| *1* | *1* | *0* | *3* | • | *1* | *3* | *4$_8$* |

*Tehát: $1001000011.0010111_2 = 1103.134_8$*

***b.) Alakítsuk át következő oktális számot közvetlenül binárisba:***

***$14765.56_8$=?***

*Természetesen az oktális szám is közvetlen felírható bináris számrendszerbe, ha használjuk a triádokat:*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *4* | *7* | *6* | *5* | • | *5* | *6$_8$* |
| *001* | *100* | *111* | *110* | *101* | • | *101* | *110$_2$* |

*Tehát: $14765.56_8 = 1100111110101.10111_2$ ( a felesleges nullákat elhagytuk.)*

***6. Mi lesz a következő decimális számok alakja hexadecimálisban?***

***a.) $579.18_{10}$***

*A már megszokott algoritmus szerint az új számrendszer alapjával (16-al) osztunk, és a maradékokat visszafelé felírjuk. A törtrészt szorozzuk az alapszámmal (16-al) és az egészrészeket rendes sorrendben felírjuk.*

| *Hányados* | *:16 maradék* |
|---|---|
| *579* | *3* |
| *36* | *4* |
| *2* | *2* |
| *0* | |

$0{,}18 \cdot 16$

$\underline{108}$

$2{,}88 \cdot 16$

*2* $\leftarrow$ $\underline{528}$

$14{,}|08$

*E* $\leftarrow$

*A szorzások után az egészrészek 2 és E, tehát: $579.18_{10} = 243.2E_{16}$*

***b.) $1998_{10}$=?***

| *Hányados* | *:16 maradék* |
|---|---|
| *1998* | *14 (E)* |
| *124* | *12 (C)* |
| *7* | *7 (7)* |
| *0* | |

*$1998_{10} = 7CE_{16}$*

***7. Alakítsuk át a következő hexadecimális számokat decimálisra!***

***a.) $7CE_{16}$=?***

*Használjuk a fejezet elején megadott hatvány értékeket!*

$$7CE_{16} = 7 \cdot 16^2 + C \cdot 16 + E \cdot 1 = 7 \cdot 256 + 12 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = 1998$$

***b.) 2AB.E1$_{16}$=?***

$$2AB,E1_{16} = 2\cdot 16^2 + A\cdot 16 + B\cdot 1 + E\cdot 10^{-1} + 1\cdot 16^{-2} =$$
$$= 2\cdot 256 + 10\cdot 16 + 11\cdot 1 + 14\cdot 0{,}0625 + 1\cdot 0{,}0039 = 683{,}8789_{10}$$

**8. *Alakítsuk át a következő bináris számot közvetlenül hexadecimálisba!***

***$1001000010.0010111_2$***

*Vegyük észre, hogy a tizenhatos és a kettes számrendszerek között is nagyon szoros a kapcsolat, hiszen a* $2^4 = 16^1$ *és* $2^8 = 16^2$ *stb. Így a bináris és a hexadecimális közötti átalakítás úgy történik, hogy a bináris számot négyes csoportokra osztjuk (törtszám esetén a tizedesponttól jobbra és balra indulva alakítjuk ki a négyes csoportokat!), ezeknek pedig megfeleltetünk egy-egy hexadecimális jegyet (lásd a fejezet elején megadott táblázatot). Ha nincs meg a 4 jegy a szám elején és végén 0-kal kell kiegészíteni.*

*Így:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***00**10* | *0100* | *0010* **.** | *0010* | *111**0*** |
| *2* | *4* | *3* | *2* | *E* |

*tehát:* $1001000010.0010111_2 = 243.2E_{16}$

**9. *Adjuk össze a $749_{10}$ , a $46_{10}$ és a $27_{10}$ számokat kettes nyolcas és tizenhatos számrendszerben!***

*Összeadás:*

| *bináris* | *oktális* | *hexadec.* | *decimális* |
|---|---|---|---|
| 1011101101 | 1355 | 2ED | 749 |
| 101110 | 56 | 2E | 46 |
| 11011 | + 33 | 1B | 27 |
| $1100110110_2$ | $1466_8$ | $336_{16}$ | $822_{10}$ |

**10. *Hajtsuk végre a $1011101101_2 - 11011111_2$ kivonást!!***

*Kivonás:*

| | |
|---|---|
| *Kisebbítendő:* | 1011101101 |
| *kivonandó* | - 11011111 |
| *eredmény* | $1000001110_2$ |

***Kivonás komplemens szám segítségével:***

*Két szám különbségét a számítógép az úgynevezett komplemens képzési és az összeadás műveletével állítja elő. Ehhez szükséges 2 definíció.*

***Definíció:*** *Legyen az adott számú pozíción ábrázolható legnagyobb szám M. Egy tetszőleges bináris szám egyes komplemensén az M és az adott szám különbségét értjük.*

***Definíció:*** *Kettes komplemensnek nevezzük az előző különbségnél eggyel nagyobb számot.*

*Ebből következik, hogy ha egy számhoz hozzáadjuk a kettes komplemensét, éppen azt a legkisebb számot kapjuk, amely az adott számú pozíción már nem fér el.*

*A művelet menete:*

1.) *A kivonandót ki kell egészíteni annyi jegyre, ahány jegyű a kisebbítendő.*

2.) *Venni kell a kivonandó egyes komplemensét( 0 helyett 1-et, 1 helyett 0-t írni). Illetve 16 rendszerben minden értéket 15-re kell kiegészíteni.*

3.) *A kapott értékhez hozzá kell adni 1-et. (Ez lesz a kivonandó kettes komplemense).*

4.) *A kapott számot hozzá kell adni a kisebbítendőhöz.*

5.) *A legelső jegyet le kell vágni, ez nem tartozik az eredményhez (túlcsordul).*

*Számpéldán illusztrálva:*

$$1011101101 - 11011111 = ?$$

1.) *kiegészítés:* ***00**11011111*

2.) *komplemens képzés:* *1100100000*

3.) *+1*

$$\begin{array}{r} 1100100000 \\ \underline{1} \\ 1100100001 \end{array}$$

4.) *összeadás:*

$$\begin{array}{r} 1011101101 \\ \underline{+\ 1100100001} \\ 11000001110 \end{array}$$

5.) *Az első jegy levágása utáni eredmény:* $\mathbf{1000001110_2}$

**11. Komplemens szám segítségével végezzük el a következő kivonásokat!**

**a.)** $\mathbf{698_{10}-482_{10}=?}$

*A feladatot végezzük el bináris és hexadecimális számrendszerben is!*

$$698_{10} = 2BA_{16} = 1010111010_2$$

$$482_{10} = 1E2_{16} = 111100010_2$$

| | *bináris* | *hexadecimális* |
|---|---|---|
| *kiegészítés:* | ***0**111100010* | *1E2* |
| *komplemens képzés:* | *1000011101* | *E1D* |

| | | |
|---|---|---|
| *+1* | *1000011110* | *E1E* |
| *Összeadás:* | *1010111010* | *2BA* |
| | *+ 1000011110* | *+ E1E* |
| | *10011011000* | *10D8* |

*Az első jegy levágása utáni eredmény:*

| | | |
|---|---|---|
| | ***11011000*** | ***D8*** |

*(természetesen az első értékes jegy előtti 00-kat nem írjuk ki.)*

***b.)*** $\boldsymbol{749_{10} - 223_{10}}$

*Ezt a feladatot binárisan már megoldottuk, (lásd 10 feladat) most csináljuk meg hexadecimális rendszerben is:*

$$749_{10} = 2ED_{16} = 1011101101_2$$

$$223_{10} = DF_{16} = 11011111_2$$

| | |
|---|---|
| *kiegészítés:* | ***0****DF* |
| *komplemens képzés:* | *F20* |
| *hozzáadás:* | *F21* |
| *Összeadás:* | $2ED+F21=120E_{16}$ |
| *eredmény:* | $\boldsymbol{20E_{16}}$ |

***c.)*** $\boldsymbol{5330_{10} - 3733_{10}}$

$$5330_{10} = 14D2_{16}$$

$$3733_{10} = E95_{16}$$

| | |
|---|---|
| *kiegészítés:* | ***0****E95* |
| *átírás:* | *F16A* |
| *+1:* | *F16B* |
| *Összadás:* | *14D2+F16B=1063D* |
| *eredmény:* | $\boldsymbol{63D_{16}}$ |

***d.)*** $\boldsymbol{3795_{10} - 757_{10}}$

*(Az eredmény:* $BDE_{16}$ *illetve* $01111011110_2$

*a megoldást már nem részletezzük)*

# 2. Halmazok

## 2.1. Feladatok

**1.** ***Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:***

*a)* $A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \cap B$

*b)* $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

*c)* $(A \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

*d)* $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$

*e)* $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$

**2.** ***Igazak-e a következő halmazos kifejezések?***

*a)* $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \emptyset$

*b)* $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

*c)* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

*d)* $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

*e)* $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$

*f)* $(A \cap \overline{B}) \circ (B \cap \overline{A}) = A \circ B$

**3.** ***Egy társasutazáson résztvevő csoport tagjai közül 6-an angolul, 6-an németül és 7-en franciául beszélnek.(Mindenki beszél legalább egy nyelvet). 4-en angolul és németül, 3-an németül és franciául, 2-an franciául és angolul. Egy valaki tud mind a 3 nyelven. Hányan vannak? Hány beszél csak angolul?***

***Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:***

**4.** $((A \cup B) \cap \overline{C}) \setminus (A \cap B)$

**5.** $\overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \overline{A}} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \overset{?}{=} A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

**6.** $(A \setminus B) \circ (C \setminus A)$

**7.** $[(A \setminus B) \circ C] \cap (A \cap \overline{B})$

**8.** ***Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:***

$A \overset{?}{=} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

**9.** ***Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:***

$$A \stackrel{?}{=} A \cup (A \cap B)$$

**10.** ***Milyen kapcsolat áll fent A és B között, ha*** $A \cup (B \cap \overline{A}) = B$ ***igaz ?***

**11.** ***Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:***

$$A \setminus (A \cap B) \cup B \stackrel{?}{=} A \cup B$$

**12.** ***Egyszerűsítsük a következő kifejezést:***

$$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) =$$

**13.** ***Fejezzük ki az ismeretlen X halmazt.***

$$(\overline{X \cup A}) \cup (\overline{X \cup \overline{A}}) = B$$

**14.** ***Bizonyítsuk be:***

$$A \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$$

**15.** ***Tekintsük meg a következő halmazokat:***

$A = \{\textit{Hazai gépkocsik}\}$

$B = \{\textit{Hazai Toyota gépkocsik}\}$

$C = \{\textit{Hazai Daewoo gépkocsik}\}$

$D = \{\textit{Hazai piros gépkocsik}\}$

$E = \{\textit{Hazai Toyota Combi gépkocsik}\}$

***Fogalmazzuk meg a lehetséges ( páronkénti ) metszeteket!***

| | |
|---|---|
| $A \cap B = ?$ | $B \cap C = ?$ |
| $A \cap C = ?$ | $B \cap D = ?$ |
| $A \cap D = ?$ | $B \cap E = ?$ |
| $A \cap E = ?$ | $C \cap D = ?$ |

**16.** ***Legyen***

*A={a,b,g}* *B={c,d,g}* *C={d,e,f,g}*

*H={a,b,c,d,e,f,g} a teljes halmaz.*

***Mik lesznek a következő halmazok elemei?***

*a)* $\overline{A} \cap B =$

*b)* $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} =$

*c)* $\overline{A \cap B} \cap C =$

*d)* $\overline{A \cap B \cap C} =$

*e)* $\overline{A \cup B} \cap \overline{C} =$

*f)* $A \cup B \cup C =$

**17.** ***Rajzoljuk fel a Venn diagramját a következő halmazoknak, ahol*** $A \neq B \neq C$ ***és egyik halmaz sem üres.***

*a)* $A \cap B = B$

*b)* $A \cup B = A$

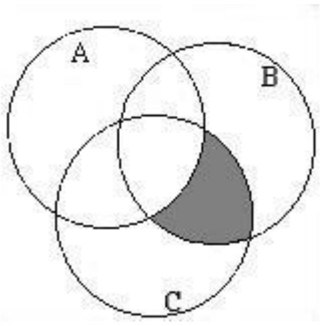
*c)* $A \cap B = 0$

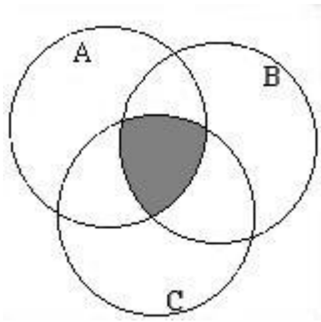
*d)* $B \cap C = C$ és $A \cap C = 0$

**18.** ***Legyen*** *A={2,3};* *B={x| $x^2$-5x+6=0};*

***Igaz-e, hogy*** *A = B ?*

**19.** ***Adottak a következő Venn diagramok. Írjuk fel a satírozott halmazokat!***




**20.** ***Igazoljuk:***

$$\left(A \cap \overline{B}\right) \cap \left(B \cup \overline{A}\right) \stackrel{?}{=} \left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

**21.** ***Legyenek:***

$A = \{x \mid 2 < x < 5\}$ $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 7\}$

***Milyen halmazokat eredményeznek az alábbi műveletek?***

$A \cap B = ?$

$\overline{A} \cap \overline{B} = ?$

$A \cup B = ?$

$A \cap \overline{B} = ?$

**22.** ***Legyen*** $A = \{x |\ 2 \le x \le 5\}$ $\quad B = \{x |\ 3 < x \le 10\}$.

***Milyen halmazokat eredményeznek az alábbi műveletek?***

*a)* $A \cap B$

*b)* $\overline{A} \cap \overline{B}$

*c)* $\overline{A \cup B}$

*d)* $\overline{A \cap B}$

*e)* $\overline{A} \cup \overline{B}$

*f)* $A \cup B$

**23.** ***Igaz-e a következő állítás?***

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \overset{?}{=} B$$

**24.** ***Adja meg rajzban az*** $\overline{A \cap B \cap C}$ ***halmazt, ha*** $A \cup B \cup C = I$ .

**25.** ***Legyen***

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$
$B = \{a, c, d, x, y, z\}$

***Képezzük a*** $A \cup B, A \cap B, \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}, A \circ B$ ***halmazokat!***

**26.** ***Legyen***

*M a páros számok halmaza;*

*N a hárommal osztható számok;*

*P a prímszámok halmaza.*

*a)* ***Hány eleme van*** $M \cap P$ ***halmaznak?***

*b)* ***Hány eleme van*** $N \cap P$ ***halmaznak?***

*c)* ***Hány eleme van*** $M \cap N$ ***halmaznak?***

*d)* ***Írjon fel olyan számokat, amelyek elemei az*** $M \cup N \cup P$ ***-nek.***

*e)* ***Mondjon olyan számot, ami nem eleme*** $M \cup N \cup P$ ***-nek.***

**27.** ***Lássa be a halmazműveletekre vonatkozó azonosságok felhasználásával a következő egyenlőséget!***

$$(A \setminus \mathrm{B}) \setminus \mathrm{C} \overset{?}{=} (A \setminus \mathrm{C}) \setminus (\mathrm{B} \setminus \mathrm{C})$$

**28.** ***Legyen 3 halmaz a következő:***

$$A = \{ALMA\} \qquad B = \{BANÁN\} \qquad C = \{CITROM\}$$

***Mekkora a 3 halmaz számossága?***

$$|A| = ? \qquad |B| = ? \qquad |C| = ?$$

***Milyen elemei vannak az alábbi halmaznak?***

$$(A \cup B) \setminus C = ?$$

***Mik lesznek $B \setminus A$ halmaz részhalmazai?***

**29.** ***3 halmaz számossága a következő:***

$$|A| = 7 \qquad |B| = 8 \qquad |C| = 10$$

***a.)*** ***Mekkora értékek között mozoghat***

$$(A \cup B \cup C) = ?$$

***b.)*** ***Mekkora ugyanezen halmaz számossága, ha a halmazok páronként vett metszete nem üres.***

**30.** ***Milyen műveleteket értelmezünk a halmazok között?***

**31.** ***Kommutatív-e két halmaz különbsége?***

**32.** ***Mit értünk egy halmaz komplementer halmazán?***

**33.** ***Ismertesse a disztributív törvényt!***

**34.** ***Milyen azonosságokat ismer az üres és az alaphalmazzal?***

**35.** ***Milyen formában lehet felírni két halmaz különbségét?***

**36.** ***Mi az A és a B halmaz szimmetrikus differenciája?***

**37.** ***Legyen A=(1,3)*** ***( a gömbölyű zárójel a nyílt intervallum!)***

*B=[2,4]* *C=[3,5]* *D=[1,5)*

***Határozza meg az alábbi halmazokat!***

$$R1 := (A \cap B)$$

$$R2 := (A \cap C)$$

$$R3 := D \setminus (A \cap B)$$

$$R4 := (B \cap C)$$

$R5 := (A \setminus B)$

$R6 := D \setminus (A \cup B)$

**38.** ***Írja le a De Morgan azonosságokat a halmazok körében!***

**39.** ***Legyen az alaphalmaz:*** $H : \{x \in Z | 0 \le x < 25\}$ ***és az ezen értelmezett A,B,C halmazok az alábbiak***:

$A = \{x \in H | x \quad páros\}$

$B = \{x \in H | x \, egyjegyű \; szám \}$

$C = \{8, \; 9, \; 10, \; 11, \; 12\}$

***Határozza meg az*** $R1 = (A \cap B) \setminus C$

$R2 = (A \cup B) \cap (\neg A \setminus C)$

$R3 = \neg(\neg C \cup \neg B)$ ***halmazok elemeit és számosságát !***

**40.** ***Írja le a Disztributív törvényeket a halmazok körében!***

**41.** ***Legyen az A halmaz a 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza, a B pedig a 3-al osztható, 100-nál kisebb pozitív egész számok halmaza. Adja meg a következő halmazokat és azok számosságát!***

| | |
|---|---|
| $A \cup B =$ | $\|A \cup B\| =$ |
| $A \cap B =$ | $\|A \cap B\| =$ |
| $A \setminus B =$ | $\|A \setminus B\| =$ |
| $B \setminus A =$ | $\|B \setminus A\| =$ |

**42.** ***Igazolja, hogy az alábbi halmazok teljes rendszert alkotnak.***

$(A \cap B) és (A \cap \neg B) és (\neg A \cap B) és (\neg A \cap \neg B)$

**43.** ***Adottak a következő halmazok:*** $H = \{x \in N \mid 0 < x \le 30\}$

$M = \{x \in H \mid x \; páros\}$ $\quad N = \{x \in H \mid x \;\; osztható \; 3-mal\}$ $\quad P = \{x \in H \mid x \; prím\}$

***Adja meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával! Mekkora a halmazok számossága?***

$M \cap P =$ $\quad\quad$ $| M \cap P | =$

$N \cap P =$ $\quad\quad$ $| N \cap P | =$

$M \cap N =$ $\quad\quad$ $| M \cap N | =$

**44.** ***Igazak-e az alábbi állítások a halmazműveletekre vonatkozóan? A kipontozott részre írja a megfelelő igaz vagy hamis minősítést! (A,B halmazok)***

$A \circ A = \emptyset$ ……………

$(A \setminus B) \cup B = A \cap B$ ……………

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ……………

***45. Legyen***

*A = {valós számok}*
*B = {irracionális számok}*

$C = \left\{ \sqrt{2}^{2k+1}, ahol \quad k = 0,1,2... \right\}$

*D = {racionális számok}*

***Melyek igazak a következő állítások közül?***

a) $A = B \cup D$
b) $B \cap D = \emptyset$
c) $C \subset B$
d) $A \subset C$
e) $(B \setminus C) \cap A = \overline{\overline{B} \cup \overline{C}}$

## 2.2. *Megoldások.*

*(Néhány feladat részletes megoldása megtalálható, az órai munkára szánt feladatoknak nem közöljük a megoldásait.)*

**1.** ***Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:***

*a)* $A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap B$

*az elemek átrendezésével*

$$A\cap\overline{B}\cap\overline{A}\cap B=(A\cap\overline{A})\cap(B\cap\overline{B})=\emptyset\cap\emptyset=\emptyset$$

*b)* $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

*az* $A$ *majd a* $\overline{A}$ *kiemelésével*

$$=\left[A\cap(B\cup\overline{B})\right]\cup\left[\overline{A}\cap(B\cup\overline{B})\right]=(A\cap H)\cup(\overline{A}\cap H)=A\cup\overline{A}=H$$

**2.** ***Igazak-e a következő halmazos kifejezések?***

*a)* $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\emptyset$ ***igaz***

*b)* $(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$ ***igaz***

*c)* $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

*A baloldal átalakításával kapjuk a jobb oldali kifejezést:*

$$A\setminus(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})=\mathrm{A}\cap(\overline{\mathrm{B}\cap\mathrm{C}})=A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=$$

$$=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})=(A\setminus\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\setminus\mathrm{C})$$

*Tehát igaz.*

*d)* $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$ ***igaz***

*e)* $A\circ(B\circ C)=(A\circ B)\circ C$ ***igaz***

**3.** ***Egy társasutazáson résztvevő csoport tagjai közül 6-an angolul, 6-an németül és 7-en franciául beszélnek.(Mindenki beszél legalább egy nyelvet). 4-en angolul és németül, 3-an németül és franciául, 2-an franciául és angolul. Egy valaki tud mind a 3 nyelven. Hányan vannak? Hány beszél csak angolul?***

*A Venn diagramot felrajzolva, beírva a számosságokat adódik, hogy angolul csak 1 ember beszél, és összesen 11-en vannak.*

**8.** ***Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket:***

$A \overset{?}{=} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

*A jobb oldalból kiindulva:*

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap H = A$

**9.** $A \overset{?}{=} A \cup (A \cap B)$

*A jobb oldali kifejezésben A helyett* $A \cap H$ *-t írva majd A-t kiemelve:*

$A \cup (A \cap B) = (A \cap H) \cup (A \cap B) = A \cap (H \cup B) = A \cap H = A$

**10.** ***A baloldalt átalakítva:***

$A \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap H = A \cup B$

*Márpedig, ha* $A \cup B = B$*, akkor az* $A \subset B$ *kell legyen, azaz A halmaz része B-nek.*

**11.** ***Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket:***

$A \setminus (A \cap B) \cup B \overset{?}{=} A \cup B$

*A baloldal átalakításával kapjuk a jobb oldalt:*

$A \setminus (A \cap B) \cup B = (A \cap \overline{A \cap B}) \cup B = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup B = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup B =$
$= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B) \cap H = A \cup B$

*Ahol felhasználtuk, hogy (* $A \cap \overline{A} = \emptyset$*), és* $\overline{B} \cup B = H$ *továbbá alkalmaztuk a disztributív törvényeket.*

**12.** ***Egyszerűsítsük a következő kifejezést:***

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) =$

*Az átalakítás során többször alkalmaztuk (* $A \cap \overline{A} = \emptyset$*) halmaz elhagyását.*

$\left(A \cap \overline{A}\right) \cup B \cap \left(A \cup \overline{B}\right) = (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{B}\right) = B \cap A$

**13.** ***Fejezzük ki az ismeretlen X halmazt.***

$(\overline{X \cup A}) \cup (\overline{X \cup \overline{A}}) = B$

A végrehajtott átalakítások:

$\left(\overline{X} \cap \overline{A}\right) \cup \left(\overline{X} \cap A\right) = \overline{X} \cup \left(\overline{A} \cap A\right) = \overline{X}$

*A baloldal átalakítása után az egyenlőség* $\overline{X} = B$ *ezért* $X = \overline{B}$ *az eredmény.*

**14.** ***Bizonyítsuk be:***

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

*A baloldal:*

$A \setminus (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

*A jobboldal:*

$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B} \cap A \cap \overline{C} = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

*Tehát azonos a két oldal.*

**16.** ***Mik lesznek a következő halmazok elemei?***

*a)* $\overline{A} \cap B = \{c, d\}$

*b)* $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = \{a, b, c, d, e, f\}$, *mert* $A \cap B \cap C = \{g\}$

*c)* $\overline{A \cap B} \cap C = \{d, e, f\}$

*d)* $\overline{A \cap B \cap C} = \{a, b, c, d, e, f\}$

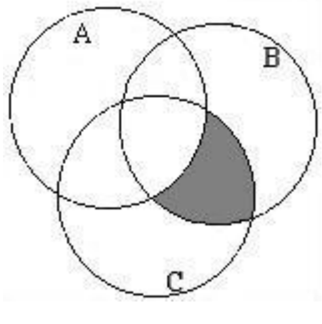
*e)* $\overline{A \cup B} \cap \overline{C} = \emptyset$

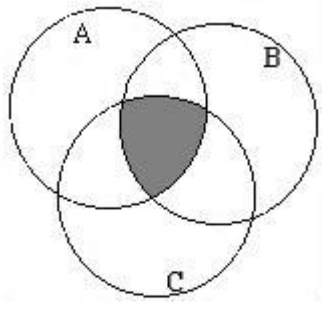
*f)* $A \cup B \cup C = H$

**18.** ***Legyen*** *A={2,3}; B={x| $x^2$-5x+6=0};* ***Igaz-e, hogy*** $A = B$ ?

*Igen, igaz, hiszen az egyenlet gyökei azon x értékek, melyekre* $x^2 - 5x + 6 = 0$. *Ezek pedig a 2 és a 3. Tehát a két halmaz elemei azonosak.*

**19.** ***Adottak a következő Venn diagramok. Írjuk fel a satírozott halmazokat!***




$B \cap C \setminus A$ *és* $A \cap B \cap C$

**21.** ***Legyenek:***

$A = \{x \mid 2 < x < 5\}$ $\qquad$ $B = \{x \mid 3 \le x \le 7\}$

*Milyen halmazokat eredményeznek az alábbi műveletek?*

$A \cap B = \{x \mid \quad 3 \le x < 5\}$ $\qquad$ *vagy* $[\mathbf{3;5}[$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{x \mid \quad x \le 2 \text{ vagy } x > 7\}$ $\qquad$ $]-\infty;2] \cup ]7;\infty[$

$A \cup B = \{x \mid \quad 2 < x \le 7\}$ $\qquad$ $]\mathbf{2;7}]$

$A \cap \overline{B} = \{x \mid \quad 2 < x < 3\}$ $\qquad$ $]\mathbf{2;3}[$

**22.** ***Legyen*** $A = \{x \mid \ 2 \le x \le 5\}$ $\qquad$ $B = \{x \mid \ 3 < x \le 10\}$.

***Milyen halmazokat eredményeznek az alábbi műveletek?***

*a)* $=$ $\qquad$ $\{x \mid \ 3 < x \le 5\}$

*b)* $=$ *c)* $=$ $\qquad$ $\{x \mid \ x < 2; x \ge 10\}$

*d)* $=$ *e)* $=$ $\qquad$ $\{x \mid \ x \le 3; x > 5\}$

*f)* $=$ $\qquad$ $\{x \mid \ 2 \le x < 10\}$

**23.** ***Igaz-e a következő állítás?***

$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B) \stackrel{?}{=} B$$

*Igaz, mert 1 elem csak egyszer szerepelhet egy halmazban (pld. A betű).*

**28.** ***Legyen 3 halmaz a következő:***

$A = \{ALMA\}$ $\qquad$ $B = \{BANÁN\}$ $\qquad$ $C = \{CITROM\}$

***Mekkora a 3 halmaz számossága?***

$|A| = 3$ $\qquad$ $|B| = 4$ $\qquad$ $|C| = 6$

***Milyen elemei vannak az alábbi halmaznak?***

$(A \cup B) \setminus C = \{BÁLNA\}$

$B \setminus A = \{BÁN\}$

***Mik lesznek B \ A halmaz részhalmazai?***

$\{Á\}$ $\{B\}$ $\{N\}$ $\{BN\}$ $\{BÁ\}$ $\{NÁ\}$ $\{BÁN\}$

**29.** ***3 halmaz számossága a következő:***

$|A| = 7$ $|B| = 8$ $|C| = 10$

***a.) Mekkora értékek között mozoghat***

$10 \leq |A \cup B \cup C| \leq 25$

***b.) Mekkora ugyanezen halmaz számossága, ha a halmazok páronként vett metszete nem üres.***

$13 \leq |A \cup B \cup C| \leq 22$

*A megoldáshoz segítséget ad, ha felrajzoljuk a Venn diagramot és a legkisebb illetve a legnagyobb értékekkel számolunk.*

# *3. Ítéletek*

## *3.1.* *Feladatok:*

**1.** ***Mi lesz a kifejezés értéke, ha*** *A=i, B=h, C=i*

$\neg(A \vee B) \wedge C =$ ?

**2.** ***Adja meg az alábbi kifejezés értékét, ha*** *A=i, B=h, C=h, D=i, E=h, F=h, G=i.*

$((A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg D) \rightarrow (E \leftrightarrow F)) \vee G =$ ?

**3.** ***Írjuk fel*** $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ***igazságtáblázatát!***

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ | $Q \rightarrow P$ | $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $i$ | | | |
| $i$ | $h$ | | | |
| $h$ | $i$ | | | |
| $h$ | $h$ | | | |

**4.** $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$***-ról lássuk be, hogy tautológia!***

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $\neg(P \wedge Q)$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \vee \neg Q$ | $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |

**5.** $(P \wedge \neg Q) \wedge Q$***-ról lássuk be, hogy ellentmondás!***

**6.** $P \rightarrow Q$ ***ekvivalens*** $\neg P \vee Q$***-val?***

**7.** ***Igaz-e a következő allítás?***

$(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) = R$ ?

**8.** ***Mutassuk meg, hogy az alábbi logikai kifejezés tautológia! (Igazságtáblázat nélkül!)***

$((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

**9.** ***Készítsük el az igazságtáblázatát az alábbi kifejezésnek:***

$\neg(\neg(P \vee \neg Q) \vee \neg R) \vee \neg(P \wedge R)$

**10.** ***Igazságtáblázat nélkül bizonyítsa be:***

$(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge \neg(R \vee \neg Q) = P \wedge \neg R\,!$

**11.** ***Mutassuk meg, hogy érvényes a disztributivitás az alábbi esetben:***

$P \to (Q \vee R) = (P \to Q) \vee (P \to R)$

**12.** ***Igaz-e a következő egyenlőség?***

$(P \to Q) \wedge (R \to Q) = (P \vee R) \to Q$

**13.** ***Határozza meg a következő logikai kifejezés értékét, ha***

$(P \overline{\vee} Q) \wedge \neg(\neg P \vee Q)$ *P = i, Q =h.*

**14.** $(P \to Q) \vee (Q \to P)$***-ről lássa be, hogy azonosan igaz kifejezés! (Minkét módszerrel!)***

**15.** ***Bizonyítsa be, hogy*** $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ ***a 17) azonosság következménye!*** *(Mindkét módszerrel!)*

**16.** ***Mi az értéke az alábbi logikai kifejezésnek, ha*** *A=5, B=2, és C=3****?***

$(\neg((A < B) \wedge (C = B)) \vee (C > A)) \wedge \neg(A > B)$

**17.** ***Milyen kapcsolat van az alábbi két kifejezés között?***

***a.)*** $P \to [P \wedge \neg(Q \vee R)]$

***b.)*** $\neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$

**18.** ***A következő kifejezések közül legfeljebb hány lehet igaz egyszerre ugyanarra a személyre?***

*a.) Jani okos*

*b.) Jani szerencsétlen*

*c.) Jani szerencsés, de nem okos*

*d.) Ha Jani okos, akkor szerencsétlen*

*e.) Jani akkor és csak akkor okos, ha szerencsés*

*f.) Jani okos, vagy szerencsés, de nem mind a kettő*

**19.** ***Van-e ellentmondás a két kifejezés között?***

$[P \vee \neg(Q \vee R) \vee (P \wedge S)]$ ***és*** $\neg(P \wedge Q \wedge R \wedge S)$

**20.** ***Mi lesz az alábbi logikai kifejezés értéke, ha*** *A=h, B=i****?***

$(A \vee B) \leftrightarrow ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$

**21.** ***A p, q, r mely értékei mellett igaz az alábbi kifejezés?***

$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

**22.** ***Milyen értéket vesznek fel az alábbi ítéletek?***

*a.)* $(\neg A \vee B) \wedge \neg C$ *ha A=i, B=h, C=i*

*b.)* $(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \wedge A)$ *ha A=i, B=i, C=i*

*c.)* $\neg(A \wedge \neg B)$ *ha A=h, B=h*

**23.** ***Mi az értéke az alábbi kifejezésnek, ha*** *A=5, B=2, C=3*

$\neg((A < B) \wedge (C = B)) \vee (C > A) \wedge \neg(A > B)$

*(A precedenciáról ne feledkezzen meg!)*

**24.** ***Fogalmazza meg az alábbi kijelentéseket jelekkel, majd fordítva!***

*A: A vállalat dolgozói prémiumot kapnak.*

*B: A vállalat belföldi forgalomban minden megrendelést kielégít.*

*C: A vállalat teljesíti az export-tervét.*

***Mit jelent?***

*a.)* $A \leftrightarrow (B \wedge C)$

*b.)* $C \rightarrow A$

*c.)* $(B \wedge C) \rightarrow A$

*d.)* $(B \wedge \neg C) \rightarrow \neg A$

*e.) A vállalat teljesíti export-tervét, és dolgozói mégsem kapnak prémiumot.*

*f.) Ha a vállalat teljesíti export-tervét, és dolgozói mégsem kapnak prémiumot, akkor a vállalat belföldi forgalomban nem fogja kielégíteni minden megrendelését.*

**25.** ***Bizonyítsa be, hogy az alábbi formulák azonosan igazak!***

*a.)* $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$

*b.)* $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P$

**26.** ***Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyek az egymással egyenértékű párok!***

*a.)* $A \rightarrow \overline{B}$

*b.)* $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$

*c.)* $\overline{A} \rightarrow B$

*d.)* $B \rightarrow A$

*e.)* $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$

*f.)* $\overline{B} \rightarrow A$

**27.** ***Bizonyítsa be, hogy az alábbi formulák azonosan igazak!***

*a.)* $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

*b.)* $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

*c.)* $[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$

**28.** ***Bizonyítsa be, hogy az implikáció nem asszociatív!***

$(A \rightarrow B) \rightarrow C \neq A \rightarrow (B \rightarrow C)$

**29.** ***Próbáljuk meg az alábbi ítéleteket komponensekre bontani, majd logikai formulává alakítani!***

*a.) Tagadom, hogy nem voltam jelen és, hogy másokat is távolmaradásra bíztattam.*

*b.) Elmegyek, és vissza se jövök, vagy újra kezdem az egészet, de akkor is elmegyek.*

*c.) Készítsük el a kapott formulák értéktáblázatát.*

**30.** ***Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi formulákat:***

*a.)* $(A \vee B) \wedge (B \vee \neg A)$

*b.)* $A \wedge (\neg A \vee B)$

**31.** ***Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:***

$\neg(\neg(A \vee \neg B) \vee \neg C) \vee \neg(A \wedge C)$

**32.** ***Írja fel 2 változó esetén az összes lehetséges igazságtáblát! Melyeknek van neve ezek közül?***

**33.** ***Írjuk át a következő kifejezést vele ekvivalens kifejezéssel, de csak*** $\wedge$ ***és*** $\neg$ ***műveleteket tartalmazzon.***

$P \wedge (Q \leftrightarrow R) \vee (R \leftrightarrow P)$

**34.** ***Írja át diszjunktív normálformába (DNF) a következő kifejezéseket!***

*a.)* $P \wedge (P \rightarrow Q)$

*b.)* $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

**35.** ***Írja át konjunktív normálformába (KNF) az előző két kifejezést***

**36.** ***Lássa be igazságtáblával és/vagy Venn diagrammal, hogy ekvivalens a 35. feladatban kapott új kifejezés a régivel.***

**37.** ***Perfekt disztributív normálformák (PDNF)***

*a.)* $P \rightarrow Q \;=\; (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

*b.)* $P \wedge Q \;=\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

*c.)* $\neg(P \wedge Q) \;=\; (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

***lássa be igazságtáblával, hogy igaz!***

*Az átírás menete PDNF-be:*

*1.) az* $\leftrightarrow$ *és* $\rightarrow$*-kat átírni* $\wedge\vee\neg$*-ra!*

*2.) a negációkat De Morgan szabállyal átírni és a disztributivitást használni*

*3.) azonosan igaz kifejezéseket és az ellentmondásokat elhagyni*

*4.) elemi szorzatokat úgy lehet csinálni (ha kell), hogy* $A \wedge i = A$

**38.** ***Írjuk át PDNF-be:*** $\neg P \vee Q$ ***kifejezést!***

**39.** ***Írjuk át PDNF-be:*** $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ ***kifejezést!***

**40.** ***Mutassuk meg, hogy***

*a.)* $P \vee (P \wedge Q) = P$

*b.)* $P \vee (\neg P \wedge Q) = P \vee Q$

***úgy, hogy írjuk át mindkét oldali kifejezést PDNF-be***

**41.** ***Írjuk át PKNF-be (perfekt konjuktiv normálforma):*** $(\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \leftrightarrow P)$

**42.** ***A következő igazságtábla felírható-e az alábbi PKNF és PDNF formulákkal?***

| *P* | *Q* | *R* | *A* |
|---|---|---|---|
| *i* | *i* | *i* | *h* |
| *i* | *i* | *h* | *h* |
| *i* | *h* | *i* | *i* |
| *i* | *h* | *h* | *h* |

| *P* | *Q* | *R* | *A* |
|---|---|---|---|
| *h* | *i* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *h* | *i* |
| *h* | *h* | *i* | *h* |
| *h* | *h* | *h* | *i* |

**43.** ***András, Béla, Csongor és Dénes futóversenyen vettek részt. Szüleiknek így számoltak be:***

*András:* *Sem első, sem utolsó nem lettem*

*Béla:* *Nem én lettem az első*

*Csongor:* *Én győztem*

*Dénes:* *Utolsó lettem*

***A 4 kijelentés közül egy hamis! Ki hazudott? Ki lett az első?***

**44.** ***Tekintsük a következő ítéleteket:***

*- Ha Éva angolul tud, akkor németül vagy franciául is tud.*

*- Éva nem tud németül*

*- Éva angolul vagy németül vagy franciául tud.*

***Következménye-e ezen ítéleteknek az „Éva franciául tud" ítélet?***

**45.** ***Egy falucska lakói három csoportba sorolhatók.*** *Az egyik csoportba tartozók – Igazmondók Csoportja – mindig igazat mondanak, a másik csoportba tartozók – Hazugok Csoportja – mindig hazudnak, végül a harmadik csoportba tartozók – Felemások Csoportja – két egymást követő kijelentésük közül az egyik igaz, a másik hamis. Egyik nap a falucska tűzoltóságán megszólal a telefon. Az ügyeletes felveszi.*

*- Tessék, tűzoltóság.*

*- Azonnal jöjjenek ki, ég az iskola.*

*- Melyik csoportba tartozol?*

*- A felemáshoz.*

***Kivonuljon-e a tűzoltóság?***

*<u>Útmutatás</u>: A következő elemi ítéleteket érdemes bevezetni:*

*„A telefonáló azt mondta, hogy Ő felemás"..*

- *„A telefonáló igazmondó”.*
- *„A telefonáló hazug”.*
- *„A telefonáló felemás”.*
- *„Ég az iskola”.*

**46.** ***Az $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ logikai változóknak és negáltjaiknak a konjunkcióját ………………………….……… –nek nevezzük.***

**47.** ***Mik azok a premisszák, és mi a konklúzió?***

**48.** ***Mikor egyenértékű az ítéletkalkulus két formulája?***

**49.** ***Igazak-e az alábbi állítások a logikai műveletekre vonatkozóan? A kipontozott részre írja a megfelelő igaz vagy hamis minősítést! (A,B ítéletek)***

$A \wedge (\neg A) = \uparrow$ ……………

$(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ ……………

$(A \leftrightarrow B) = ((\neg A) \rightarrow B) \wedge ((\neg B) \rightarrow A)$ ……………

**50.** ***Igazak-e az alábbi állítások a logikai műveletekre vonatkozóan? A kipontozott részre írja a megfelelő igaz vagy hamis minősítést! (A,B ítéletek)***

$(\neg A) \rightarrow B = A \wedge B$ ……………

$(\neg A) \rightarrow B = A \vee B$ ……………

$A \rightarrow B = \neg(A \vee (\neg B))$ ……………

$A \rightarrow B = ((\neg A) \wedge (\neg B))$ ……………

**51.** ***Igaz-e, hogy az $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ formula azonosan igaz?*** *Indokolja igazságtáblával!*

*a) azonosan igaz b) nem azonosan igaz (Karikázza be a megfelelőt!)*

*Az igazságtábla:*

| $A$ | $B$ | $B \rightarrow A$ | $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ |
|---|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | | |
| $\uparrow$ | $\downarrow$ | | |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | | |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | | |

**52.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*A logikának az az ága, mely az elemi ítéletek logikai értékét más ítéletek logikai értékétől függetlennek tekinti, az ..........................................................................*

**53.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*Az elemi összegek szorzatából álló logikai kifejezés a .............................................*

**54.** ***Melyik lépés nem igaz az alábbi levezetésben?*** *(Több válasz is jó lehet, karikázza be!)*

$$(A \vee B) \wedge (B \vee \neg A) = (B \vee A) \wedge (B \vee \neg A) = B \vee (A \wedge \neg A) = B \vee \downarrow = B$$

*a) 1. lépés b) 2. lépés c) 3. lépés*

*d) 4. lépés e) minden lépés helyes*

**55.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*Az ítéletkalkulus egy formulája ........................................, ha a formula logikai értéke minden kiértékelés esetén igaz.*

**56.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*Az elemi szorzatok összegéből álló logikai kifejezés a*

*.......................................................*

## 3.2. *Megoldások.*

**1. *Mi lesz a kifejezés értéke, ha*** *A=i, B=h, C=i*

$\neg(A \vee B) \wedge C = ?$

$\neg(i \vee h) \wedge i = \neg i \wedge i = h \wedge i = h$

**2. *Adja meg az alábbi kifejezés értékét, ha*** *A=i, B=h, C=h, D=i, E=h, F=h, G=i.*

$((A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg D) \rightarrow (E \leftrightarrow F)) \vee G = ?$

$((i \vee i) \wedge (h \vee h) \rightarrow i) \vee i = ((i \wedge h) \rightarrow i) \vee i = (h \rightarrow i) \vee i = i \vee i = i$

**3. *Írjuk fel*** $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ***igazságtáblázatát!***

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ | $Q \rightarrow P$ | $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ |
|---|---|---|---|---|
| *i* | *i* | *i* | *i* | *i* |
| *i* | *h* | *h* | *i* | *h* |
| *h* | *i* | *i* | *h* | *h* |
| *h* | *h* | *i* | *i* | *i* |

*Vegyük észre, hogy ez egyenlő a* $P \leftrightarrow Q$*-val.*

**4.** $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$***-ról lássuk be, hogy tautológia!***

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $\neg(P \wedge Q)$ | $\neg P$ | $\neg Q$ | $\neg P \vee \neg Q$ | $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *i* | *i* | *i* | *h* | *h* | *h* | *h* | *i* |
| *i* | *h* | *h* | *i* | *h* | *i* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *h* | *i* | *i* | *h* | *i* | *i* |
| *h* | *h* | *h* | *i* | *i* | *i* | *i* | *i* |

*Tehát Tautológia a kifejezés, azaz P és Q minden érték esetén igaz a kifejezés.*

**5.** $(P \wedge \neg Q) \wedge Q$ ***-ról lássuk be, hogy ellentmondás!***

| $P$ | $Q$ | $\neg Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $(P \wedge \neg Q) \wedge Q$ |
|---|---|---|---|---|
| *i* | *i* | *h* | *h* | *h* |
| *i* | *h* | *i* | *i* | *h* |
| *h* | *i* | *h* | *h* | *h* |
| *h* | *h* | *i* | *h* | *h* |

**6.** $P \to Q$ ***ekvivalens*** $\neg P \vee Q$***-val?***

| $P$ | $Q$ | $P \to Q$ | $\neg P \vee Q$ |
|---|---|---|---|
| *i* | *i* | *i* | *i* |
| *i* | *h* | *h* | *h* |
| *h* | *i* | *i* | *i* |
| *h* | *h* | *i* | *i* |

*A két kifejezés igazságtáblája azonos, tehát ekvivalensek.*

**7.** ***Igaz-e a következő állítás?***

$(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) = R$ ?

*A disztributivitást, majd a De Morgan azonosságot felhasználva a levezetés:*

$$\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R) = ((\neg P \wedge \neg Q) \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R) =$$
$$= (\neg(P \vee Q) \wedge R) \vee ((Q \vee P) \wedge R) = (\neg(P \vee Q) \vee (Q \vee P)) \wedge R = i \wedge R = R$$

**11.** ***Mutassuk meg, hogy érvényes a disztributivitás az alábbi esetben***

$P \to (Q \vee R) = (P \to Q) \vee (P \to R)$

*Az implikáció átalakítási azonossága miatt:*

$$P \to (Q \vee R) = \neg P \vee (Q \vee R) = (\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R) = (P \to Q) \vee (P \to R)$$

**12.** ***Igaz-e a következő egyenlőség?***

$(P \to Q) \wedge (R \to Q) = (P \vee R) \to Q$

$$(P \to Q) \wedge (R \to Q) = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \vee Q) =$$
$$(\neg P \wedge \neg R) \vee Q = \neg(P \vee R) \vee Q = (P \vee R) \to Q$$

*Tehát igaz.*

**13.** ***Határozza meg a következő logikai kifejezés értékét, ha***

$(P \overline{\vee} Q) \wedge \neg(\neg P \vee Q)$ $\quad P = i, \quad Q = h.$

*Akizáró vagy szabálya szerint egy igaz és egy hamis ítélet igaz, így* $i \wedge \neg h = i \wedge i = i$

*Tehát igaz a kifejezés.*

**14.** $(P \to Q) \vee (Q \to P)$***-ről lássa be, hogy azonosan igaz kifejezés!***

$$(P \to Q) \vee (Q \to P) = (\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee P) = (P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q) = i \vee i = i$$

*Az igazságtáblával való belátás nagyon könnyű, az olvasóra bízzuk.*

**15.** ***Bizonyítsa be, hogy*** $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) =$$
$$= ((\neg P \vee P) \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge P) = ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)) \vee ((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)) =$$
$$= (\neg P \wedge \neg Q) \vee h \vee h \vee (Q \wedge P) = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

*Ezt kellett belátni.*

**16.** *Hamis.*

**17.** *Azonosak.*

**18.** *4*

**19.** *Nincs.*

**20.** *Igaz.*

**21.** *Mindig*

**22.** *a) Hamis*

*b) Hamis*

*c) Igaz*

**23.** *Azonosan igaz a kifejezés. (A megoldás során figyelni kell arra, hogy a konjukció erősebb prioritású, mint a diszjunkció!)*

**25.** ***Bizonyítsa be, hogy az alábbi formulák azonosan igazak!***

*a.)* $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$

$$P \wedge (P \rightarrow Q) = P \wedge (\neg P \vee Q) = (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) = P \wedge Q$$

*Ennek felhasználásával*

$$(P \wedge (P \wedge Q)) \rightarrow Q = (P \wedge Q) \rightarrow Q = \neg(P \wedge Q) \vee Q = \neg P \vee \neg Q \vee Q = \neg P \vee i = i$$

*b.)* $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow \neg P$

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q = (\neg P \vee Q) \neg Q = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) = \neg P \wedge \neg Q = \neg(P \vee Q)$$

*Ennek felhasználásával*

$$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg Q = \neg(P \vee Q) \rightarrow \neg Q = \neg\neg(P \vee Q) \vee \neg Q = P \vee Q \vee \neg Q =$$
$$= P \vee (Q \vee \neg Q) = P \vee i = \underline{\underline{i}}$$

**26.** ***Döntsük el, hogy az alábbi formulák közül melyek az egymással egyenértékű párok!***

| | |
|---|---|
| *a.)* $A \rightarrow \overline{B}$ | *d.)* $B \rightarrow A$ |
| *b.)* $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$ | *e.)* $\overline{B} \rightarrow \overline{A}$ |
| *c.)* $\overline{A} \rightarrow B$ | *f.)* $\overline{B} \rightarrow A$ |

*Ha átírjuk a kifejezéseket láthatóvá válnak az azonos kifejezések:*

*a.)* $A \to B = \neg A \vee \neg B$

*b.)* $\neg A \to \neg B = \neg\neg A \vee \neg B = A \vee \neg B$

*c.)* $\neg A \to B = \neg\neg A \vee B = AB$

*d.)* $B \to A = \neg B \vee A = A \vee \neg B$

*e.)* $\neg B \to \neg A = \neg\neg B \vee \neg A = B \vee \neg A$

*f.)* $\neg B \to A = \neg\neg B \vee A = B \vee A = A \vee B$ *Tehát b-d és c-f kifejezések egyenértékűek.*

**28.** ***Bizonyítsa be, hogy az implikáció nem asszociatív!***

$(A \to B) \to C \neq A \to (B \to C)$

*A baloldal:*

$A \to B = \neg A \vee B$ *felhasználásával*

$\neg(\neg A \vee B) \vee C = (\neg\neg A \wedge \neg B) \vee C = (A \vee \neg B) \vee C = (A \vee C) \wedge (\neg B \vee C)$

*A jobboldal:*

$A \to (B \to C) = A \to (\neg B \vee C) = \neg A \vee (\neg B \vee C)$

*A két kifejezés valóban nem hozható azonos formára.*

**29.** ***Próbáljuk meg az alábbi ítéleteket komponensekre bontani, majd logikai formulává alakítani!***

*a.) Tagadom, hogy nem voltam jelen és, hogy másokat is távolmaradásra bíztattam.*

*Legyen A: jelen voltam, B: másokat is távolmaradásra biztattam.*

*Ekkor az állítás:* $\neg(\neg A \wedge B)$

*b.) Elmegyek, és vissza se jövök, vagy újra kezdem az egészet, de akkor is elmegyek.*

*Legyen A: elmegyek B: vissza se jövök C: újra kezdem*

*Ekkor az állítás::* $(A \wedge B) \vee (C \wedge B)$

*c.) Készítsük el a kapott formulák értéktáblázatát.*

| $A$ | $B$ | $\neg(\neg A \wedge B)$ |
|---|---|---|
| *i* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *h* |
| *i* | *h* | *i* |
| *h* | *h* | *i* |

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \wedge B) \vee (C \wedge B)$ |
|---|---|---|---|
| *i* | *i* | *i* | *i* |
| *i* | *i* | *h* | *i* |
| *i* | *h* | *i* | *h* |
| *i* | *h* | *h* | *h* |
| *h* | *i* | *i* | *i* |
| *h* | *i* | *h* | *h* |
| *h* | *h* | *i* | *h* |
| *h* | *h* | *h* | *h* |

**30.** ***Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi formulákat:***

*a.)* $(A \vee B) \wedge (B \vee \neg A) = B$

*b.)* $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$

**31.** ***Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést:***

$$\neg(\neg(A \vee \neg B) \vee \neg C) \vee \neg(A \wedge C) = \neg((\neg A \wedge B) \vee \neg C) \vee \neg(A \wedge C) =$$
$$\neg(\neg A \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C)) \vee \neg(A \wedge C) = \neg(\neg(A \wedge C) \wedge (B \vee \neg C)) \vee \neg(A \wedge C) =$$
$$= (A \wedge C) \vee \neg(B \vee \neg C) \vee \neg(A \wedge C) = i \vee \neg(B \vee \neg C) = i$$

*Felhasználtuk, hogy* $A \vee \neg A =$ *igaz mindig az* $(A \wedge C)$ *kifejezésre, valamint hogy*

*igaz* $\vee$ *bármi = igaz mindig.*

**32.** ***Írja fel 2 változó esetén az összes lehetséges igazságtáblát!***

*P és Q két változó összes lehetséges kitöltési módja* $2^4=16$

| **P** | **Q** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **i** | **i** | i | i | i | i | i | i | i | i | h | h | h | h | h | h | h | h |
| **i** | **h** | i | i | i | i | h | h | h | h | i | i | i | i | h | h | h | h |
| **h** | **i** | i | i | h | h | i | i | h | h | i | i | h | h | i | i | h | h |
| **h** | **h** | i | h | i | h | i | h | i | h | i | h | i | h | i | h | i | h |

*Bármelyik 2 változós logikai kifejezés igazságtáblázata ezek közül valamelyik. Például az ekvivalencia a 7., a konjukció a 8., a diszjunkció a 13.*

~ . ~

*A logikai műveletek közül eddig használtunk 5 félét* $(\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow)$. *Ezek közül egyesek kifejezhetők a többivel.*

*A logikai műveletek azon halmazát, amelyeknek elemeivel bármely kifejezés felírható, FUNKCIONÁLISAN TELJES művelethalmaznak nevezzük. Ilyenek:* $\{\wedge, \neg\}$ *és* $\{\vee, \neg\}$ *halmazok.*

**33.** ***Írjuk át a következő kifejezést olyan vele ekvivalens kifejezéssel, ami csak*** $\wedge$ ***és*** $\neg$ ***műveleteket tartalmaz.***

$P \wedge (Q \leftrightarrow R) \vee (R \leftrightarrow P)$

*Felhasználva, hogy* $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$P \wedge (Q \leftrightarrow R) \vee (R \leftrightarrow P) = P \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee Q)) \vee ((\neg R \vee P) \wedge (\neg P \vee R))$

*Most a* $\vee$*-ket* $\wedge$*-ekre kell cserélni.*

*Felhasználjuk, hogy* $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$

*ekkor a folytatás:*

$$P \wedge (\neg(Q \wedge \neg R) \wedge \neg(R \wedge \neg Q)) \vee (\neg(R \wedge \neg P) \wedge \neg(P \wedge \neg R)) =$$
$$= P \wedge \neg(\neg(\neg(Q \wedge \neg R) \wedge \neg(R \wedge \neg Q)) \wedge \neg(\neg(R \wedge \neg P) \wedge \neg(P \wedge \neg R))$$

*Ebben a kifejezésben pedig már csak* $\wedge$ *és* $\neg$ *van, az* $\{\wedge;\neg\}$ *halmaz funkcionálisan teljes.*

**34.** ***Írja át diszjunktív normálformába (DNF)!***

*a.)* $P \wedge (P \to Q)$

*A diszjunktív normálforma olyan kifejezés, amely elemi szorzatok összegéből áll. Tehát*

$$P \wedge (P \to Q) = P \wedge (\neg P \vee Q) = (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q).$$

*Minden logikai kifejezés átírható DNF-ba, de ezek nem feltétlenül azonosak. Tehát egy logikai kifejezéshez lehet több DNF-t is hozzárendelni.*

*b.)* $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

*Beláthatjuk, hogy*

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$$

*Ennek alapján, ha A-t* $\neg(P \vee Q)$*-nak, B-t* $P \wedge Q$*-nak vesszük, akkor*

$$((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \vee (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) = ((P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q) \wedge (P \wedge Q)) =$$
$$= ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P \neg Q \wedge Q) =$$
$$= (P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (h \wedge h) =$$
$$= h \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee h \vee (h \wedge h) = (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q)$$

*és ez DNF.*

**35.** ***Írja át konjunktív normálformába (KNF) az előző két kifejezést!***

*a.)* $P \wedge (P \to Q) = P \wedge (\neg P \vee Q)$

*b.) Beláttuk már, hogy* $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

*Ennek alapján, ha A-t* $\neg(P \vee Q)$*-nak, B-t* $P \wedge Q$*-nak vesszük, akkor:*

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) =$$

$$((P \vee Q) \vee (P \wedge Q)) \wedge (\neg(P \wedge Q) \vee \neg(P \vee Q)) = ((P \vee Q) \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) =$$
$$= (P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P) = (P \vee Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) =$$
$$= (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

*és ez KNF*

.

**42.** *a.) Igen, ha A=i, ezt PKNF-el írtuk fel.*

$$A = (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

*Bármilyen logikai kifejezéshez meg lehet adni a konjunktív vag diszjunktív normál alakot. Az igazakat konjunktív a hamisakat diszjunktív normál formával adjuk meg.*

*b.) Ahol A=h, azokat PDNF-el írtuk fel.*

$$A = (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$$

**43.** *Vegyük észre, hogy ha egy hamis állítás van, akkor A, B, C, D kijelentések PDNF-be átírhatók:*

$$(\neg A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D)$$

*Eredmény: Dénes hazudott és Csongor lett az első. (Tudni lehet még, hogy András nem negyedik).*

**45.** *"A telefonáló azt mondta, hogy ő felemás" ÉS „A telefonáló vagy igazmondó, vagy hazug, vagy felemás" ÉS „Ha a telefonáló igazmondó, akkor nem mondhatta azt, hogy ő felemás" ÉS „Ha a telefonáló felemás, akkor nem igaz, hogy ég az iskola és egyúttal, hogy igazat mondott, hogy ő felemás". Mindebből következik, hogy* ***nem ég az iskola****.*

# *4. Relációk*

## **4.1.** *Feladatok*

**1.** ***Legyen*** $A= \{0,1\}$ *és* $B = \{ a,b,c\}$

***Adjuk meg az*** $A \times B$ ***direkt szorzat halmazt!***

**2.** ***Adottak az alábbi halmazok:***

*NÉV* = {*Béla, Kati, Márk, László*}

*TÁRGY* = {*Mat, Fiz, Szta*}

*JEGY* = {*1,2,3,4,5*}

***a) képezzük a nevek, tárgyak és jegyek direkt szorzatát!***

***b) Írjunk fel egy relációt a 3 halmazból!***

***c) Adjunk meg egy binér relációt a nevek és a jegyek között!***

**3.** ***Legyen*** $R_1 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $R_1 = \{(x, y) \mid x^2+y^2=25 \}$ ***reláció, ahol R a valós számok halmaza.***

*Azaz az (x,y)koordinátájú pont rajta van az origó központú 5 sugarú körön.*

***Igaz- e hogy:***

***a)*** *3R4* ***b)*** *4R(-3)* ***c)*** *2R3*

***d) Milyen tulajdonságú a fenti reláció?***

**4.** ***Síkbeli egyenesek között értelmezett párhuzamosság ekvivalencia relációt határoz-e meg?***

**5.** ***Legyen*** $R_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $R_2 = \{(x, y) \mid 3 \mid x-y \}$

***Mutassuk meg, hogy a reláció ekvivalencia reláció.***

**6.** ***A valós számok körében értelmezett egyenlőség a=b ekvivalencia reláció-e?***

$R_3 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $R_3 = \{(x, y) \mid x=y \}$

**7.** ***Milyen tulajdonságúak a következő relációk?***

*a) Síkbeli körök között 2 kör akkor van relációban, ha van közös pontjuk.*

*b) Síkbeli egyenesek között 2 egyenes akkor van relációban, ha van pontosan 1 közös pontjuk (metsző egyenesek).*

*c) Síkbeli egyenesek között 2 egyenes akkor van relációban, ha legalább 1 közös pontjuk van (azonos is lehet).*

**8.** ***A következő természetes számok halmazán értelmezett relációk közül melyek milyen tulajdonságokkal bírnak?***

*n, m* $\in$ *N természetes számok.*

a) $R_1 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R_1 = \{(n,m) \mid n+m \text{ páros}\}$

b) $R_2 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R_2 = \{(n,m) \mid n+m \leq 10\}$

c) $R_3 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R_3 = \{(n,m) \mid m/n = 2^k\}$ ahol $k \in N$

**9.** ***A következő egész számok halmazán értelmezett relációk közül melyek milyen tulajdonságokkal bírnak?***

a) $R_4 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $\quad R_4 = \{(n,m) \mid 3 \mid m+n\}$

b) $R_5 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $\quad R_5 = \{(n,m) \mid 3 \mid m-n\}$

c) $R_6 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $\quad R_6 = \{(n,m) \mid m/n \text{ páros}\}$

**10.** ***Legyen a reláció természetes számok N halmazán értelmezett oszthatóság, azaz legyen***

$R \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R = \{(a,b) \mid a|b\}$

***Lássuk be, hogy az oszthatóság a természetes számok halmazán parciális rendezési reláció!***

**11.** ***Lássuk be, hogy a $\leq$ reláció teljes rendezési reláció!***

**12.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót!***
*Legyen $R \subset D \times D$ egy homogén binér reláció. Az R ……………………………… tulajdonságú reláció, ha minden $a \neq b \in D$ esetén vagy az aRb vagy bRa teljesül. (kizáró vagy értelemben).*

**13.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót!***
*Legyen $R \subset D \times D$ egy homogén binér reláció. Az R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív akkor R* **……………………………………** *reláció.*

**14.** ***Mi a dichotom tulajdonság a relációk körében?***

**15.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót!***
*Legyen $R \subset D \times D$ egy homogén binér reláció. Ha $\forall a,b \in D$ esetén a R b akkor és csak akkor teljesül, ha b R a , akkor R ……………………………… tulajdonságú reláció.*

**16.** ***Adott a következő reláció:*** $R \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R = \{(a,b) \mid a \equiv b \bmod (5)\}$***. Bizonyítsa be, hogy ez a reláció ekvivalencia reláció!***

*(* $a \equiv b \bmod (5)$*, ha a és b 5-tel való osztási maradéka megegyezik)*

**17.** ***Az = relációra az ismert 5 tulajdonság közül melyik igaz? Válaszát indokolja!***

**18.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót!***
*Legyen $R \subset D \times D$ egy homogén binér reláció. Ha $a\ R\ a$ teljesül $\forall a \in D$ esetén, akkor R ……………………………. tulajdonságú reláció.*

**19.** ***Sorolja fel a kongruencia reláció három tulajdonságát:***

………………………………, ………………………, ………………………

**20.** ***Az a tulajdonság, hogy $\forall a,b \in N$ esetén (azaz minden** a, b **természetes számra)***

$a \le b$ ***és*** $b \le a \Rightarrow a = b$ ***a '≤' reláció melyik tulajdonsága?***

*a) szimmetria* *b) antiszimmetria* *c) dichotómia*

*d) reflexivitás* *e) tranzitivitás* *f) egyik sem*

**21.** ***Az a tulajdonság, hogy $\forall a \in N$ esetén (azaz minden** a, b **természetes számra)***

$a \le a$ ***a '≤' reláció melyik tulajdonsága?***

*a) szimmetria* *b) antiszimmetria* *c) dichotómia*

*d) reflexivitás* *e) tranzitivitás* *f) egyik sem*

**22.** ***Sorolja fel a ≤ reláció három tulajdonságát:***

………………………………, ………………………, ………………………

**23.** ***Írjon két példát ekvivalencia relációra!***

…………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………..

**24.** ***Az a tulajdonság, hogy $\forall a,b,c \in N$ esetén (azaz minden a, b,c természetes számra)***

$a \equiv b$ *mod (3)* ***és*** $b \equiv c$ *mod (3)* $\Rightarrow a \equiv c$ *mod (3)* ***a '≡' reláció melyik tulajdonsága?***

*(ahol $a \equiv b$ mod (3): a kongruens b-vel modulo 3, azaz 'a' 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adja, mint 'b'.)*

*a) szimmetria* *b) antiszimmetria* *c) dichotómia*

*d) reflexivitás* *e) tranzitivitás* *f) egyik sem*

**25.** ***Legyen** $R \subset D \times D$ **egy homogén binér reláció. Ha** $a\ R\ b$ **és** $b\ R\ a$ **esetén** $a=b$ $\forall a,b \in D$**-re akkor** R **……………………………. tulajdonságú reláció.***

**26.** ***Írjon két példát parciális rendezési relációra!***

…………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………..

**27.** ***Legyen*** *R* $\subset$ ***N×N*** ***reláció olyan, hogy*** *n, m* $\in$ ***N esetén*** *nRm****, ha*** *n+m* ***páros.*** *(Azaz 2 természetes szám akkor van relációban, ha összegük páros.)*
***Milyen tulajdonságok igazak erre az*** *R* ***relációra?*** *(több válasz is jó lehet, karikázza be!)*

*a) szimmetria* *b) antiszimmetria* *c) dichotómia*

*d) reflexivitás* *e) tranzitivitás* *f) egyik sem*

**28.** ***Mit jelent a*** *fenti (előző példa) reláció esetén a* ***reflexivitás fogalma?*** *(Karikázza be!)*

*a) minden n* $\in$ ***N*** *esetén n+n páros,*

*b) minden n, m* $\in$ ***N*** *esetén n+m páros* $\Rightarrow$ *m+n páros,*

*c) minden n, m* $\in$ ***N*** *esetén n+m páros és m+l páros,* $\Rightarrow$ *n+l páros,*

*d) minden n, m* $\in$ ***N*** *esetén n+m páros és m+n páros* $\Rightarrow$ *n=m.*

## 4.2. *Megoldások:*

**1.** ***Legyen*** *A= {0,1}* *B = { a,b,c}*

***Adjuk meg az*** *A x B* ***direkt szorzat halmazt!***

*A halmaznak 3x2 = 6 eleme van:* $\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$

**2.** ***Adottak az alábbi halmazok:***

*NÉV =* *{Béla, Kati, Márk, László}*

*TÁRGY =* *{MAT, FIZ, SZTA}*

*JEGY =* *{1,2,3,4,5}*

***a) Képezzük a nevek, tárgyak és jegyek direkt szorzatát!***

*Név x Tárgy x Jegy direkt szorzata:* *4x3x5=60 elemű halmaz*

$\forall$ *eleme rögzített sorrendű hármas*

$$\left\{\begin{matrix}[Béla,MAT,1],[Béla,MAT,2],[Béla,MAT,3],[Béla,MAT,4],[Béla,MAT,5],\\ [Béla,FIZ,1],[Béla,FIZ,2],[Béla,FIZ,3],[Béla,FIZ,4],[Béla,FIZ,5],\\ [Béla,SZTA,1],[Béla,SZTA,2],[Béla,SZTA,3],[Béla,SZTA,4],[Béla,SZTA,5],\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}[Kati,MAT,1],[Kati,MAT,2],[Kati,MAT,3],[Kati,MAT,4],[Kati,MAT,5],\\ [Kati,FIZ,1],[Kati,FIZ,2],[Kati,FIZ,3],[Kati,FIZ,4],[Kati,FIZ,5],\\ [Kati,SZTA,1],[Kati,SZTA,2],[Kati,SZTA,3],[Kati,SZTA,4],[Kati,SZTA,5],\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}[Márk,MAT,1],[Márk,MAT,2],[Márk,MAT,3],[Márk,MAT,4],[Márk,MAT,5],\\ [Márk,FIZ,1],[Márk,FIZ,2],[Márk,FIZ,3],[Márk,FIZ,4],[Márk,FIZ,5],\\ [Márk,SZTA,1],[Márk,SZTA,2],[Márk,SZTA,3],[Márk,SZTA,4],[Márk,SZTA,5],\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}[László,MAT,1],[László,MAT,2],[László,MAT,3],[László,MAT,4],[László,MAT,5],\\ [László,FIZ,1],[László,FIZ,2],[László,FIZ,3],[László,FIZ,4],[László,FIZ,5],\\ [László,SZTA,1],[László,SZTA,2],[László,SZTA,3],[László,SZTA,4],[László,SZTA,5],\end{matrix}\right\}$$

***b) Írjunk fel egy relációt a 3 halmazból!***

*Ennek a direkt szorzatnak bármely részhalmaza reláció. Például, ki miből hányasra vizsgázott:*

$\{[Béla,MAT,4],[Kati,MAT,3],[Márk,MAT,5],[László,MAT,4]\}$

$\{[Béla,FIZ,5],[Kati,FIZ,3],[Márk,FIZ,4],[László,FIZ,4]\}$

$\{[Béla,SZTA,3],[Kati,SZTA,5],[Márk,SZTA,5],[László,SZTA,4]\}$

***c) Adjunk meg egy binér relációt a nevek és a jegyek között!***

*2 halmazból képzett binér reláció lehet úgy, hogy ki – milyen minősítést ért el:*

$$\{[Béla,4],[Kati,3],[Márk,5],[László,4]\}$$

**3.** ***Legyen*** $R_1 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $R_1 = \{(x, y) \mid x^2+y^2=25\}$ ***reláció, ahol R a valós számok halmaza.***

*Azaz az (x,y)koordinátájú pont rajta van az origó központú 5 sugarú körön.* ***Igaz- e hogy:***

*a)* *3R4* *igaz*

*b)* *4R(-3)* *igaz*

*c)* *2R3* *nem igaz*

*d) Reflexív a reláció? Nem, mert pld a 3R3 nem igaz, és 4R4 sem igaz.*

*Szimmetrikus? Igen, mert a négyzetösszeg kommutatív.*

*Tranzitív? Nem, mert pld 3R4, és 4R3, de 3R3 már nem igaz.*

**4.** ***Síkbeli egyenesek között értelmezett párhuzamosság ekvivalencia relációt határoz-e meg?***

*Párhuzamosság:* ***e||f***

1. ***Reflexív****: a||a –igaz, mert az egyenes párhuzamos önmagával ugyanis minden pont távolsága 0 a másik egyenestől.*
   *(Megj.:Két egyenes párhuzamos, ha az egyik egyenes minden pontja azonos távolságra van a másik egyenes minden pontjától.)*
2. ***Szimmetrikus****: – igen, ha e||f, akkor f||e is igaz.*
3. ***Tranzitív****: igen, mert ha e||f és f||g, akkor biztos, hogy e||g is igaz.*

*A kérdésre a válasz IGEN, mert mind a 3 tulajdonság teljesül a párhuzamosságra!*

**5.** ***Legyen*** $R_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $R_2 = \{(x, y) \mid 3 \mid x-y\}$

***Mutassuk meg, hogy a 3 | x-y reláció ekvivalencia reláció, ahol*** $x \in \mathbf{R}$ ***és*** $y \in \mathbf{R}$

*Az xRy, ha 3 | x-y, tehát az x-y osztható 3-al.*

*Tulajdonságai:*

1. ***Reflexív****: xRx, azaz x-x osztható 3-al? Igen, x-x=0 ami osztható 3-al, mert a 0-nak minden szám osztója.*
2. ***Szimmetrikus****: Igen. Ugyanis azt kell belátnunk, hogy ha 3|x-y* $\Rightarrow$ *3|y-z. Mivel y-x=-(x-y), így ha x-y osztható 3-al akkor y-x is osztható ( a maradék mindkét esetben 0, a hányados ellenkező előjelű) .*
3. ***Tranzitív****: Igen. 3|x-y azt jelenti, hogy x-y=3k, ahol* $k \in R$.
   *Hasonlóan 3|y-z,*$\Rightarrow$ *y-z=3l, ahol* $l \in R$. *Ebből következik, hogy*
   $x - z = (x-y)+(y-z) = 3k+3l = 3(k+l)$, *azaz x-z is osztható 3-al.*

**6.** ***A valós számok körében értelmezett egyenlőség*** *a=b* ***ekvivalencia reláció-e?***

*Ekvivalencia reláció, ha Reflexív, Szimmetrikus és Tranzitív.*

*a=a,* $\forall a \in R$ *esetén a reláció* ***reflexív****.*

*a=b és b=a* $\forall a,b \in R$ *egyszerre teljesül, tehát* **szimmetrikus** *a reláció.*

*a=b és b=c* $\forall a,b,c \in R$ *esetén a=c is igaz, tehát* ***tranzitív*** *a reláció.Így igaz, hogy* ***ekvivalencia reláció****.*

*(Megjegyzés: a kongruencia reláció is ekvivalencia reláció!)*

**7.** ***Milyen tulajdonságúak a következő relációk?***

a) *Síkbeli körök között 2 kör akkor van relációban, ha van közös pontjuk*

*Nem definiáltuk, hogy 1 közös pont, 2 vagy akárhány, tehát lehet érintő, metsző kör és azonos 2 kör is. Így a* **reflexiv***itás teljesül, hiszen 2 azonos kör relációban van, mert van közös pontjuk: aRa.*

*A* **szimmetria** *is* ***igaz****, hiszen ha* $k_1$ *körnek van közös pontja* $k_2$*-vel, akkor fordítva is igaz.*

*A* ***tranzitivitás*** *viszont* **nem igaz***, mert ha* $k_1$ *és* $k_2$ *körnek van közös pontja és* $k_2$ *és* $k_3$ *körnek is van közös pontja, ebből még nem következik, hogy* $k_1$ *és* $k_3$ *köröknek is van közös pontja.*

b) *Síkbeli egyenesek között 2 egyenes akkor van relációban, ha van pontosan 1 közös pontjuk (Metsző egyenesek)*

*Két metsző egyenesre a*

***reflexivitás nem igaz*** *(önmagával nem metsző)*

*a* ***szimmetria igaz*** *és (ha e metszi f-et, akkor f is metszi e-t)*

*a* ***tranzitivitás nem igaz*** *(ha e és f metsző egyenesek és f és g egyenesek is metszőek, akkor nem biztos, hogy e és g metszőek, mert lehetnek párhuzamosak is)*

c) *Síkbeli egyenesek között 2 egyenes akkor van relációban, ha legalább 1 közös pontjuk van (azonos is lehet)*

*2 közös pontú egyenes (amik azonosak is lehetnek)*

*a reflexivitás* ***igaz***

*a szimmetria* ***igaz***

*a tranzitivitás* ***nem igaz****.*

**8.** ***A következő természetes számok halmazán értelmezett relációk közül melyek milyen tulajdonságokkal bírnak?***

*n, m* $\in$ *N természetes számok.*

a) $R_1 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $R_1 = \{(n,m) \mid n+m \text{ páros} \}$ *Reflexív, szimmetrikus, tranzitív*

b) $R_2 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $R_2 = \{(n,m) \mid n+m \leq 10 \}$ *Nem reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív* *c)* $R_3 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $R_3 = \{(n,m) \mid m/n = 2^k\}$ *ahol* $k \in N$

*Ez a reláció reflexív, nem szimmetrikus, tranzitív, de antiszimmetrikus, azaz* ***parciális rendezési reláció.***

*Megjegyzés: Ha* $k \in \mathbf{N}$ *helyett* $k \in \mathbf{R}$*, akkor más a helyzet! Ekkor szimmetrikus a reláció azaz* ***ekvivalencia reláció****. A halmaz jelölésére figyelni kell!*

**9.** ***A következő egész számok halmazán értelmezett relációk közül melyek milyen tulajdonságokkal bírnak?***

*a)* $R_4 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $R_4 = \{(n,m) \mid 3 \mid m+n\}$ *Nem reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív*

*b)* $R_5 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $R_5 = \{(n,m) \mid 3 \mid m-n\}$ *Reflexív, szimmetrikus és tranzitív*

*c)* $R_6 \subset \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ $R_6 = \{(n,m) \mid m/n \text{ páros}\}$ *Nem reflexív, nem szimmetrikus, de tranzitív. Mivel nem szimmetrikus, meg kell nézni az antiszimmetriát. Nem antiszimmetrikus de dichotom a reláció.*

*Megjegyzés: Nem mindegy, hogy nRm vagy mRn-ről beszélünk!*

**10.** ***Legyen a természetes számok N halmazán értelmezett oszthatóság.***

$R \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $R = \{(a,b) \mid a|b\}$

***Lássuk be, hogy az oszthatóság a természetes számok halmazán parciális rendezési reláció!***

*Ez egy homogén bináris reláció.* $a|b$

***Reflexív*** *a reláció? Igen, mert* $a|a$ *minden esetben, mert minden szám osztója önmagának.*

**Szimmetrikus***? Nem,* $a|b$ *-ből nem következik, hogy* $b|a$ *is igaz.*

*Például:,* $2|8$ *de* $8|2$ *nem igaz a természetes számok körében* $\frac{2}{8} = \frac{1}{4} \notin N$

**Antiszimmetrikus***? Igen, mert* $a|b$ *és* $b|a$ *csak akkor lehet igaz, ha a=b teljesül.*

**Dichotom***? Igen, mert* $a|b$ *és* $b|a$ $a \neq b$ *esetén csak az egyik igaz.*

***Tranzitiv****? Igen mert ha* $a,b,c \in \mathbf{N}$ ***és*** $a|b$ *és* $b|c$ *egyszerre igazak, akkor* $b = b_1 \cdot a$ *és* $c = c_1 \cdot b$ *ahol* $b_1$ *és* $c_1$ *természetes számok.*

*Ekkor azonban* $c = c_1 \cdot b = c_1(b_1 \cdot a) = (c_1 b_1)a$*, azaz* $c_1 b_1$ *egész lévén* $a|c$ *reláció is teljesül.*

***Tehát*** *az oszthatóság* ***parciális rendezési reláció*** *a természetes számok körében!*

***11. Lássuk be, hogy a ≤ reláció teljes rendezési reláció!***

*Részletes magyarázat nélkül a* $\leq$ *reláció teljes rendezési reláció, mert reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom tulajdonságú.*

# <u>5. Függvények</u>

## <u>5.1.</u> Feladatok

**1.** ***Legyen*** $X := \{1, 5, P, Péter\}$ $Y := \{2, 5, 7, q, Pál\}$ *és* $R \subset X \times Y$ ***reláció***

*ahol* $R = \{(1,2), (5,7), (P, q), (Péter, q)\}$

***Milyen tulajdonságú a reláció, függvény-e a reláció?***

**2.** ***Legyen*** $R \subset D_1 \times D_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $R = \{(x, x^2 + 2) \mid x \text{ valós szám}\}$ ***reláció.***

***Függvény-e a fenti reláció? Válaszát indokolja!***

***Milyen*** $D_1$ ***és*** $D_2$ ***választás esetén lesz a fenti reláció bijektiv függvény?***

**3.** ***Legyen N a természetes számok halmazán értelmezet reláció:***

$R \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $R = \{(n, n+1) \mid n \in N\}$

***Függvény-e a reláció?***

***Hogyan válasszuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, hogy a függvény bijektív legyen?***

**4.** ***Legyen*** $A = \{a, b\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ *a reláció:* $R \subset A \times B$

***Az alábbi relációk közül melyek függvények, és mik a tulajdonságaik?***

*a)* $R = \{(a,1), (b,3)\}$

*b)* $R = \{(a,2), (b,3)\}$

*c)* $R = \{(a,2), (b,1)\}$

*d)* $R = \{(a,1)\}$

*e)* $R = \{(a,1), (a,2), (b,3)\}$

**5.** ***Legyen*** $A = \{a, b, c\}$ *és* $B = \{1, 2\}$, ***a reláció:*** $R \subset A \times B$

***Hány olyan relációt tudunk képezni, ami függvény és szurjektív?***

**6.** ***Legyen*** $A = \{a, b, c\}$ *és* $B = \{1, 2\}$, ***a reláció:*** $R \subset A \times B$

***Hány olyan relációt tudunk képezni, ami függvény és injektív?***

**7.** ***Legyen*** $A \subseteq \mathbf{R}$ $B \subseteq \mathbf{R}$ *ahol* $\mathbf{R}$ *a valós számok halmaza és* $R_s \subset A \times B$

***Válasszuk ki az alábbi** $R_S$ **relációk közül azokat, melyek függvények, majd vizsgáljuk meg a függvények tulajdonságait!***

*a)* $A=B=\mathbf{R}$ $\qquad R_S = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

*b)* $A=[-1,1]$ $\quad B=\{\mathbf{R}^+\}$ $\qquad R_S = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$

*c)* $A=\mathbf{R}$ $\quad B=[-1,1]$ $\qquad R_S = \{(x,y) \mid y=\sin(x)\}$

*d)* $A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad B=\mathbf{R}$ $\qquad R_S = \{(x,y) \mid y=\sin(x)\}$

**8.** ***Legyen*** *A={1977 év napjai} és B={1977-ben született gyerekek}*

***Definiáljuk az alábbi relációkat:***

$R_1 \subseteq A\times B$ $\qquad$ *$R_1$={(a,b)| az A halmaz minden napjához hozzárendelem az aznap született gyerekeket a B halmazból}*

$R_2 \subseteq B\times A$ $\qquad$ *$R_2$={(a,b)| minden B halmazbeli gyerekhez hozzárendelem a születésnapját az A halmazból }*

***Függvény-e az** $R_1$**, illetve az** $R_2$**?***

**9.** ***Legyen N a természetes, R a valós számok halmaza***

$R_S \subset \mathbf{N}\times\mathbf{R}$ $\quad R_S = \{(n,\sqrt{n}) \mid n\in N\}$

***Függvény-e a reláció,és milyen tulajdonságú?***

**10.** ***Legyen*** $X=\{1,2,3\}$ $\quad Y=\{p,q,r\}$ ***és*** $R\subset X\times Y$ ***reláció, ahol*** $R=\{(1,p);(2,q);(3,q)\}$

***Képezzük az*** $R\subset X\times Y$ ***relációhoz az*** $R^{-1}\subset Y\times X$ ***relációt, ahol*** $R^{-1}=\{(p,1);(q,2);(q,3)\}$

***Inverze-e az** $R^{-1}$ **reláció** R- **nek?***

***Függvény-e az** R **reláció? Indokolja!***

***Függvény-e az** $R^{-1}$ **reláció? Indokolja!***

**11.** ***Legyen*** $R_1\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ***és*** $R_1^{-1}\subset\mathbf{R}\times\mathbf{R}$

$R_1=\{(x,x^2) \mid x\in\mathbf{R}$, *(ahol **R** a valós számok halmaza)*$\}$ ***reláció és***

$R_1^{-1}=\{(x^2,x) \mid$ *x valós szám*$\}$ ***reláció.***

***Inverze-e az** $R_1^{-1}$ **reláció** $R_1$**- nek?***

***Függvény-e az** $R_1$ **reláció? Indokolja!***

***Függvény-e az** $R_1^{-1}$ **reláció? Indokolja!***

**12.** ***Legyen*** $R_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $\quad R_2 = \{(x, x+2) \mid x \in R \text{ valós szám}\}$ ***reláció***

***és*** $\quad R_2^{-1} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ $\quad R_2^{-1} = \{(x+2, x) \mid x \in R \text{ valós szám}\}$ ***reláció.***

***Inverze-e az*** $R_2^{-1}$ ***reláció*** $R_2$***- nek?***

***Függvény-e az*** $R_2$ ***reláció? Indokolja!***

***Függvény-e az*** $R_2^{-1}$ ***reláció? Indokolja!***

**13.** ***Legyen*** $X=\{0,1\}$ $\quad Y=\{p,q,r,s\}$ ***és*** $R \subset X \times Y$ ***reláció, ahol*** $R = \{(0,p); (1,r)\}$

***Képezzük az*** $R \subset X \times Y$ ***relációhoz az*** $R^{-1} \subset Y \times X$ ***relációt, ahol*** $R^{-1} = \{(p,0); (r,1)\}$

***Inverze-e az*** $R^{-1}$ ***reláció*** $R$***- nek?***

***Függvény-e az*** $R$ ***reláció? Indokolja!***

***Függvény-e az*** $R^{-1}$ ***reláció? Indokolja!***

**14.** ***Függvény-e a következő reláció?***

*A ={síkbeli egyenesek}* $\quad (a, b \in A)$,

$Rs=\{(a,b) \,/\, \text{ha 'a' és 'b' egyenesek által bezárt szög } 60^o\} \subseteq A \times A.$

**15.** *A ={nem negatív egészek}* $\quad$ *B ={páros számok}*

***Konstruáljunk bijektív leképezést*** *A* ***és*** *B* ***halmazok között (ha lehet)!***

**16.** ***Konstruáljunk bijektív leképzést két tetszőleges síkbeli szakasz között.***

**17.** ***Legyen*** $R \subset D_1 \times D_2 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R = \{(x,y) \mid y=x/2\}$ *reláció.*

***és*** $\quad R^* \subset D_2 \times D_1 \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R^* = \{(y,x) \mid x=2*y\}$ ***reláció.***

***Inverze e az*** $R^*$ ***reláció az*** $R$ ***relációnak?***

***Függvény-e az*** $R$ ***reláció? Válaszát indokolja!***

***Függvény-e az*** $R^*$ ***reláció? Válaszát indokolja!***

**(*Milyen*** $D_1$ ***és*** $D_2$ ***választás esetén lesz a fenti két reláció bijektiv függvény?*)**

**18.** ***Legyen*** $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$ ***és*** $R \subset X \times Y$ ***reláció, ahol*** $R=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$.

***Írja fel a reláció inverzét!***

***Függvény-e az*** $R$ ***reláció? Ha igen, akkor milyen tulajdonságok igazak rá?***

***Függvény-e az inverz reláció? Ha igen, akkor milyen tulajdonságok igazak rá?***

**19.** ***Mikor bijektív egy függvény?***

**20.** ***Legyen*** $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$ ***és*** $R \subset X \times Y$ ***reláció, ahol*** $R=\{(1,a),(1,c),(3,b)\}$.

***Írja fel a reláció inverzét!***

***Függvény-e az** R **reláció? Ha igen, akkor milyen tulajdonságok igazak rá?***

***Függvény-e az inverze? Ha igen, akkor milyen tulajdonságok igazak rá?***

**21.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*Az* $\boldsymbol{f}: D_1 \times D_2$ *függvény …………………………, ha* $D_1$ *különböző elemeinek különböző képek felelnek meg.*

**22.** ***Legyen*** $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{p,q,r\}$ ***és*** $R \subset X \times Y$ ***reláció, ahol*** $R=\{(1,p),(2,q),(3,q)\}$.

***Milyen párokat tartalmaz az*** $R^{-1} \subset Y \times X$ ***inverz reláció?***

$R^{-1}$ = ..........................................................................................................

***Melyik állítás igaz az** R **relációra? (Több válasz is jó lehet, karikázza be!)***

*a) R nem függvény* *b) R injektív függvény*

*c) R szürjektív függvény* *d) R függvény, de nem injektív és nem szürjektív*

***Melyik állítás igaz az*** $R^{-1}$ ***inverz relációra? (Több válasz is jó lehet, karikázza be!)***

*a)* $R^{-1}$ *nem függvény* *b)* $R^{-1}$ *injektív függvény*

*c)* $R^{-1}$ *szürjektív függvény* *d)* $R^{-1}$ *függvény, de nem injektív és nem szürjektív*

**23.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*Az* $\boldsymbol{f}: D_1 \times D_2$ *függvény …………………………, ha* $D_2$ *minden eleme képelem.*

**24.** ***Egészítse ki az alábbi definiciót:***

*Az* $\boldsymbol{f}: D_1 \times D_2$ *függvény bijektív, ha ………………………… és …………………………*

**25.** ***Legyen*** $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{p,q,r\}$ ***és*** $R \subset X \times Y$ ***reláció, ahol*** $R=\{(1,p),(2,q),(3,r)\}$..

***Milyen párokat tartalmaz az*** $R^{-1} \subset Y \times X$ ***inverz reláció?***

$R^{-1}$ = ..........................................................................................................

***Melyik állítás igaz az** R **relációra? (Több válasz is jó lehet, karikázza be!)***

*a) R nem függvény* *b) R injektív függvény*

*c) R szürjektív függvény* *d) R függvény, de nem injektív és nem szürjektív*

***Melyik állítás igaz az*** $R^{-1}$ ***inverz relációra? (Több válasz is jó lehet, karikázza be!)***

*a)* $R^{-1}$ *nem függvény* *b)* $R^{-1}$ *injektív függvény*

*c)* $R^{-1}$ *szürjektív függvény* *d)* $R^{-1}$ *függvény, de nem injektív és nem szürjektív*

## <u>5.3.</u> *Megoldások*

**1.** ***Legyen*** $X{:}=\{1,5,P,Péter\}$ $Y{:}=\{2,5,7,q,Pál\}$ *és* $R\subset X\times Y$ ***reláció***

*ahol* $R=\{(1,2),(5,7),(P,q),(Péter,q)\}$

***Milyen tulajdonságú a reláció, függvény-e a reláció?***

*-a reláció függvény, de* ***nem szurjektív****, mert sem az 5, sem a Pál nem kap hozzárendelést, és* ***nem injektív****, mert a q-t többször is hozzárendelték.*

*-* ***Mikor lenne injektív?*** *Ha pld (Péter, Pál) lenne a függvény hozzárendelése, de szurjektív akkor sem lenne, tehát bijektív sem!*

*-* ***Mikor lenne bijektív?*** *Ha az* $Y=\{2,7,q,Pál\}$ *lenne.*

**2.** ***Legyen*** $R\subset D_1\times D_2\subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ $R=\{(x,x^2+2)\ |x\,valós\quad szám\}$ ***reláció.***

***Függvény-e a fenti reláció? Válaszát indokolja!***

***Milyen*** $D_1$ ***és*** $D_2$ ***választás esetén lesz a fenti reláció bijektiv függvény?***

*A reláció függvény, de* ***nem szurjektív****, és* ***nem injektív.***

*Mikor lenne* ***bijektív*** *a függvény? Ha* $D_1$ *és* $D_2$ *is csak a nem negatív valós számok halmaza lenne, és* $D_2$ *elemeire* $\geq$ *2 kellene hogy fennálljon.*

**3.** ***Legyen N a természetes számok halmazán értelmezet reláció:***

$R\subset \mathbf{N}\times \mathbf{N}$ $R=\{(n,n+1)\ |n\in N\ \}$

***Függvény-e a reláció?***

***Hogyan válasszuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét, hogy a függvény bijektív legyen?***

*A reláció függvény,* ***injektív*** *de* ***nem szurjektív*** *mert az 1 et sosem veszi fel (a 0 nem természetes szám) Akkor lenne* ***bijektív*** *a függvény, ha az értékkészletből kivennénk az 1 értéket, vagy az értelmezési tartományhoz hozzávesszük a 0-t.*

**4.** ***Legyen*** $A=\{a,b\}$ $B=\{1,2,3\}$ ***a reláció:*** $R\subset A\times B$

***Az alábbi relációk közül melyek függvények, és mik a tulajdonságaik?***

*a)* $R=\{(a,1),(b,3)\}$

*a reláció függvény, injektív, de nem szurjektív,mert a 2 kimaradt a hozzárendelésből*

*b)* $R=\{(a,2),(b,3)\}$

*a reláció függvény, injektív,de nem szurjektív, mert az 1 kimaradt a hozzárendelésből* *c) $R = \{(a,1)\}$reláció nem függvény, b-hez nem rendel semmit.*

*d) $R = \{(a,1),(a,2),(b,3)\}$*

*A reláció nem függvény, nem egyértelmű a hozzárendelés, mert az a-hoz kétféle elemet is rendel.*

*Egyik hozzárendelés sem lehet szurjektív, mert egy elem kimarad a B képelemei közül, hiszen 2 elemhez kellene 3 elemet hozzárendelni egyértelműen, és ez lehetetlen.*

**5.** ***Legyen*** $A = \{a, b, c\}$ *és* $B = \{1,2\}$, ***a reláció:*** $R \subset A \times B$

***Hány olyan relációt tudunk képezni, ami függvény és szurjektív?***

*A lehetséges hozzárendelések:*

$R_1$ ={(a,1),(b,2),(c,1)} $R_2$ ={(a,1),(b,2),(c,2)}

$R_3$ ={(a,2),(b,1),(c,2)} $R_4$ ={(a,1),(b,1),(c,2)}

$R_5$ ={(a,2),(b,1),(c,1)} $R_6$ ={(a,2),(b,2),(c,1)}

$R_7$ ={(a,1),(b,1),(c,1)} $R_8$ ={(a,2),(b,2),(c,2)}

*Az $R_1$ től $R_6$ relációk mind szurjektívek de nem injektívek, az $R_7$ és $R_8$ hozzárendelés már nem is szurjektív. Tehár 6 db.*

**6.** ***Legyen*** $A = \{a, b, c\}$ *és* $B = \{1,2\}$, ***a reláció:*** $R \subset A \times B$

***Hány olyan relációt tudunk képezni, ami függvény és injektív?***

*Az 5. feladat 8 db hozzárendeléséből egyik sem injektív mert 3 elemű halmazból 2 elemű halmazra injektív függvény hozzárendelés nem lehetséges.) Tehát 1 ilyet se tudunk képezni.*

**7.** ***Legyen*** $A \subseteq \mathbf{R}$ $B \subseteq \mathbf{R}$ *ahol **R** a valós számok halmaza és* $R_S \subseteq A \times B$ *reláció*

*ahol* $x \subset A$, $y \subset B$.

***Válasszuk ki az alábbi** $R_S$ **relációk közül azokat, melyek függvények, majd vizsgáljuk meg a függvények tulajdonságait!***

*a)* $A=B=\mathbf{R}$ $R_S = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$

*A hozzárendelés nem függvény, mert egy elemhez több elemet is hozzárendel.*

$y = \sqrt{1-x^2}$ $1 - x^2 >= 1$ $1 >= x^2$,

*tehát* $-1 <= x <= 1$ *lenne az az értelmezési tartomány ahola reláció már függvény.*

*b)* $A = [-1,1]$ *B={pozitív valós számok}* $R_S = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$

*Ez a hozzárendelés már függvény, de nem szurjektív és nem injektív. Nem minden elem képelem, hiszen 1-nél nagyobb hozzárendelés nincs, valamint nem különbözőek a hozzárendelések.*

*c)* $A=\mathbf{R}$ $\quad B=[-1{,}1]$ $R_{S}=\{(x,y)|y=\sin(x)\}$

*A hozzárendelés függvény, szurjektív, de nem injektív.*

*d)* $A=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $B=\mathbf{R}$ $\quad R_{S}=\{(x,y)|y=\sin(x)\}$

*A hozzárendelés függvény ,és injektív, de nem szurjektív.*

*Akkor lenne szurjektív is, ha* $B=[-1{,}1]$ *lenne.Ebben az esetben bijektív lenne a függvény, invertálható, az inverze pedig arcsin(x) fv.(lsd analízis)*

**8.** ***Legyen*** *A={1977 év napjai} és B={1977-ben született gyerekek}*

***Definiáljuk az alábbi relációkat:***

$R_1\subseteq A\times B$ $\quad$ *$R_1$={(a,b)| az A halmaz minden napjához hozzárendelem az aznap született gyerekeket a B halmazból}*

$R_2\subseteq B\times A$ $\quad$ *$R_2$={(a,b)| minden B halmazbeli gyerekhez hozzárendelem a születésnapját az A halmazból }*

***Függvény-e az** $R_1$**, illetve az** $R_2$**?***

*$R_1$ reláció nem függvény (mert 1 naphoz több gyerek is tartozhat)*
*$R_2$ reláció függvény, mert minden gyerekhez egyértelműen hozzárendeltünk egy napot, de ez a nap nem feltétlen különböző A függvény nem injektív, és nem szurjektív hiszen nem biztos hogy minden nap kap hozzárendelést.*

**9.** ***Legyen N a természetes, R a valós számok halmaza***

$R_S\subset \mathbf{N}\times\mathbf{R}$ $\quad R_S=\{(n,\sqrt{n})\,|n\in N\}$

***Függvény-e a reláció, milyen tulajdonságú?***

*A reláció függvény de nem szurjektív, mert a függvény képe nem az egész értelmezési tartomány ( például a $\pi$-t nem veszi fel soha). Injektív a függvény mert különböző elemek képe különböző. A függvény nem bijektív.*

**10.** ***Legyen*** $X=\{1,2,3\}$ $Y=\{p,q,r\}$ ***és*** $R\subset X\times Y$ ***reláció,***

***ahol*** $R=\{(1,p)\ (2,q)\ (3,q)\}$

***Képezzük az*** $R\subset X\times Y$ ***relációhoz az*** $R^{-1}\subset Y\times X$ ***relációt, ahol***

$R^{-1}=\{(p,1)\ (q,2)\ (q,3)\}$

***Inverze-e az** $R^{-1}$ **reláció R- nek?*** $\qquad$ *nem*

***Függvény-e az R reláció? Indokolja!*** $\qquad$ *igen*

***Függvény-e az** $R^{-1}$ **reláció? Indokolja!*** $\qquad$ *nem*

*Az R reláció függvény, de nem bijektív, így nem invertálható (hiszen nem injektív).*

*Az $R^{-1}$ reláció nem függvény, mert nem egyértelmű a hozzárendelés, mint reláció inverze az R-nek, de mint függvény nem.*

**11.** ***Legyen*** $R_1 \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ***és*** $R_1^{-1} \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$

$R_1 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbf{R}$, (*ahol* $\mathbf{R}$ *a valós számok halmaza*)$\}$ ***reláció és***

$R_1^{-1} = \{(x^2, x) \mid x$ *valós szám*$\}$ ***reláció.***

***Inverze-e az*** $R_1^{-1}$ ***reláció*** $R_1$***- nek?*** *igen*

***Függvény-e az*** $R_1$ ***reláció? Indokolja!*** *igen*

***Függvény-e az*** $R_1^{-1}$ ***reláció? Indokolja!*** *nem*

*Az* $R_1$ *reláció függvény, de nem bijektív, így nem invertálható (hiszen nem injektív).*

*Az* $R^{-1}$ *reláció nem függvény, mert nem egyértelmű a hozzárendelés, mint reláció inverze az R-nek, de mint függvény nem.*

**12.** ***Legyen*** $R_2 \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ $R_2 = \{(x, x+2) \mid x \in R$, *(ahol R a valós számok halmaza)*$\}$ ***reláció és*** $R_2^{-1} \subset \mathbf{R}\times\mathbf{R}$ $R_2^{-1} = \{(x+2, x) \mid x$ *valós szám*$\}$ ***reláció.***

***Inverze-e az*** $R_2^{-1}$ ***reláció*** $R_2$***- nek?*** *igen*

***Függvény-e az*** $R_2$ ***reláció? Indokolja!*** *igen*

***Függvény-e az*** $R_2^{-1}$ ***reláció? Indokolja!*** *igen*

*Az* $R_2$ *reláció függvény, szurjektív, és injektív tehát bijektív és ekkor invertálható.*

*Az* $R_2^{-1}$ *reláció is függvény, szurjektív, és injektív tehát bijektív, és inverze az R-nek.*

**13.** ***Legyen*** $X=\{0,1\}$ $Y=\{p,q,r,s\}$ *és* $R \subset X\times Y$ ***reláció, ahol*** $R = \{(0,p)\ (1,r)\}$

***Képezzük az*** $R \subset X\times Y$ ***relációhoz az*** $R^{-1} \subset Y\times X$ ***relációt, ahol*** $R^{-1} = \{(p,0)\ (r,1)\}$

***Inverze-e az*** $R^{-1}$ ***reláció*** *R*- ***nek?*** *igen*

***Függvény-e az*** *R* ***reláció? Indokolja!*** *igen*

***Függvény-e az*** $R^{-1}$ ***reláció? Indokolja!*** *nem*

*Az R reláció függvény, de nem bijektív, így nem invertálható (nem szurjektív).*
*Az* $R^{-1}$ *reláció nem függvény, mert minden elemhez rendel képelemet. Mint reláció inverze az R-nek az* $R^{-1}$*, de mint függvény nem.*

**14.** ***Függvény-e a következő reláció?***

*A ={síkbeli egyenesek}* $(a, b \in A)$,

*Rs=* $\{(a,b) \mid$ *ha 'a' és 'b' egyenesek által bezárt szög* $60^o$ $\} \subseteq A\times A$ .

*Ha a és b egyenesek által bezárt szög* $60^o$*, akkor egyértelmű a hozzárendelés, tehát a reláció függvény. Mivel különbözőhöz különbözőt rendelünk, tehát szurjektív és injektív is így a függvény invertálható is.*

# <u>6. A számfogalom bővítése</u>

## <u>6.1.</u> *A teljes indukció*

*A teljes indukció egy bizonyítási módszer, mellyel pozitív egész számokra vonatkozó állításokat bizonyíthatunk be.*

*Az eljárás két részletből áll:*

**I.** ***Megmutatjuk, hogy az állítás igaz n=1 esetén.***

**II.** ***Megmutatjuk, hogy az állítás öröklődik, azaz feltéve, hogy valamelyik $k \in N^+$ esetén igaz az állítás, igazoljuk, hogy ekkor (k+1) esetén is igaz.***

*A két részlet együttesen biztosítja, hogy az állítás minden $n \in N^+$ esetén igaz. Ugyanis n=1-ről indulva II. szerint következtethetünk, hogy n=2-re is igaz, innen n=3-ra és így tovább egyesével lépkedve bármely pozitív egészig eljuthatunk.*

*Kezdőszámként esetenként 0-t, vagy 1-nél nagyobb rögzített pozitív számot kell alkalmazni a bizonyítandó állítás értelme szerint.*

*Lássuk néhány felhasznált összefüggés igazolását teljes indukcióval!*

### 1. A Bernoulli-féle egyenlőtlenség

***Adott $h > -1$ valós szám. Bármely $n \in N^+$ esetén $(1+h)^n \geq 1+nh$.***

*Az n=1 esetén a baloldal és a jobboldal egyaránt 1+h, így az állítás teljesül. Most tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség valamely $k \in N^+$-ra teljesül, azaz:*

$$(1+h)^k \geq 1+kh$$

*Meg kell mutatnunk, hogy az egyenlőtlenség (k+1)-re is teljesül, azaz:*

$$(1+h)^{k+1} \geq 1+(k+1)h$$

*Valóban, az indukciós feltevést használva:*

$$(1+h)^{k+1} = (1+h)(1+h)^k \geq (1+h)(1+kh) = 1+h+kh+kh^2 \geq 1+h+kh = 1+(k+1)h$$

*Ezzel a bizonyítást befejeztük.*

### 2. Az első n pozitív egész összegképlete

***Az első n pozitív egész szám összege:*** $1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

*Az n=1 esetben mindkét oldal értéke 1, így az egyenlőség teljesül.*

*Tegyük fel, hogy a képlet valamely $k \in N^+$-ra érvényes. Azaz:*

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

*Meg kell mutatnunk, hogy az egyenlőség (k+1)-re is teljesül, azaz:*

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

*Valóban, az indukciós feltétel felhasználásával:*

$$1+2+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

### 3. *A négyzetszámok összegképlete*

***Az első n pozitív egész szám négyzetének összege:***

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

*Az n=1 esetben mindkét oldal 1.*

*Tegyük fel, hogy* $1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

*Igazolnunk kell, hogy* $1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

*Valóban,*

$$\left(1^2+2^2+...+k^2\right)+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)\left(2k^2+k+6k+6\right)}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

### 4. *A mértani sorozat összegképlete*

***Az*** $a_n=a_1q^{n-1}$ ***képlettel megadott mértani sorozat első n tagjának összege a q=1 eset kivételével:***

$$a_1+a_1q+...+a_1q^{n-1}=a_1\frac{q^{n-1}}{q-1}$$

*Az n=1 esetben mindkét oldal* $a_1$.

*Tegyük fel, hogy:* $a_1+a_1q+...+a_1q^{k-1}=a_1\frac{q^{k-1}}{q-1}$.

*Igazolnunk kell, hogy:* $a_1+a_1q+...+a_1q^{k-1}+a_1q^k=a_1\frac{q^{k+1}-1}{q-1}$.

*Valóban:*

$$\left(a_1 + a_1 + \ldots + a_1 q^{k-1}\right) + a_1 q^k = a_1 \frac{q^k - 1}{q-1} + a_1 q^k = a_1 \frac{q^k - 1 + q^{k+1} - q^k}{q-1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q-1}$$

## 5. *Az n-edik hatványok különbségének szorzattá bontása*

$a^n - b^n = (n-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$ ***minden*** $n \in N^+$ ***esetén.***

*A tétel n=1 esetén nyilván igaz, n=2, 3 esetén is ismert azonosság.*

*Tegyük fel, hogy valamely* $k \in N^+$ *-ra fennáll a tétel, azaz:*

$$a^k - b^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$$

*Igazolnunk kell a tétel érvényességét (k+1)-re, azaz, hogy:*

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \ldots + ab^{k-1} + b^k\right)$$

*Az indukciós feltevésből:* $a^k = (a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right) + b^k$.

*Így:*

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^k a - b^k b = \left[(a-b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right) + b^k\right]a - bb^k =$$

$$= (a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \ldots + a^2 b^{k-2} + ab^{k-1}\right) + ab^k - bb^k =$$

$$(a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \ldots + a^2 b^{k-2} + ab^{k-1}\right) + (a-b)b^k = (a-b)\left(a^k + a^{k-1}b + \ldots + ab^{k-1} + b^k\right)$$

*Ezzel a bizonyítást befejeztük.*

## *6.2. Feladatok:*

*Bizonyítsuk be teljes indukcióval:*

1. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

2. $\sum k^3 = [n(n+1)/2]^2$

3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

4. $\frac{1}{1\cdot 2} + \dots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

5. $\frac{1}{1\cdot 3} + \dots \frac{1}{3\cdot 5} + \dots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

6. $1\cdot 4 + 2\cdot 7 + \dots n(3n+1) = n(n+1)^2$

7. $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > 2$ *igaz* $\forall n \in T$

8. $2^{2n} - 3n - 1 = 9t$ *alakú t term. szám* $n \geq 2$

## *7. Számonkérések*

*Félévközi Zárthelyi dolgozat*

NÉV:............................................................................................ Pont: ..........................

**1.** 4 pont

Komplemens kivonással végezze el kettes számrendszerben a következő kivonást:

$591_{10} - 324_{10} =$

**2.** 4 pont

Igaz-e a következő egyenlőség? Állítását levezetéssel bizonyítsa be!

$A \setminus (A \cap B) \cup B = A \cup B$

**3.** 3 pont

Mi az értéke a következő kifejezésnek, ha a = hamis és b = igaz? Teljes pontszám akkor jár, ha a részműveletek eredményeit is megadja.

$(a \vee b) \leftrightarrow ((\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$

**4.** 4 pont

Adott a következő reláció: $R \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ $\quad R = \{(a,b) \mid a \equiv b \bmod (5)\}$ Bizonyítsa be, hogy ez a reláció ekvivalenciareláció!

($a \equiv b \bmod (5)$, ha a és b 5-tel való osztási maradéka megegyezik)

**5.** 4 pont

Legyen X={1,2,3}, Y={a,b,c} és $R \subset X \times Y$ reláció, ahol $R = \{(1,a);(2,b);(3,b)\}$.

Írja fel a reláció inverzét!

Függvény-e az R reláció? Ha igen, akkor milyen tulajdonságok igazak rá?

Függvény-e az inverz reláció? Ha igen, akkor milyen tulajdonságok igazak rá?

**6**. Irja le a Peano axiómákat ( 5 db) ! 4 pont

**7**. Mikor bijektív egy függvény? 2 pont

**Számítástudomány alapjai I** **VIZSGA.** **F csoport**

**Név:** **Kód:**

---

Töltse ki a kipontozott részeket a megfelelő szóval vagy betűvel, számmal.

1./ A $125_{10}$ hexadecimális alakja: …………………………………. 1 pont

2./ A $0{,}75_8$ hexadecimális alakja: …………………………………. 1 pont

3./ $110000_2$ 10-es számrendszerbeli alakja: …………………………………. 1 pont

4./ Igazak-e az alábbi állítások a halmazműveletekre vonatkozóan? A kipontozott részre írja a megfelelő igaz vagy hamis minősítést! (A,B,C halmazok)

$A \cap ( B \cup C ) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ …………..

$A \cap \emptyset = A$ …………..

$A \setminus \emptyset = A$ ………….. 5 pont

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = A \cap B$ …………..

$(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ …………..

5./ Az ítéletkalkulus egy formulája …………………………., ha a formula logikai értéke minden kiértékelés esetén igaz. 1 pont

6./ Az implikáció művelet igazságtáblája : 1 pont

| | ↑ | ↓ |
|---|---|---|
| ↑ | | |
| ↓ | | |

7./ Az elemi szorzatok összegéből álló logikai kifejezés a …………………………… 1 pont

8./ A parciális rendezési relációk 3 tulajdonsága:

…………………………, …………………………, ………………………… 3 pont

9./ Az **R** parciális rendezési relációval rendezett D halmaz egy M eleme ……………………,

ha nincs olyan $x \in D$, melyre $x \neq M$ és M **R** x. 2 pont

9./ Az A halmazban értelmezett **f** belső művelet ……………………. tulajdonságú, 1 pont

ha $\forall$ a, b $\in$ A esetén: **f** ( a , b ) = **f** ( b , a ).

10./ Az olyan halmazt, mely ekvivalens a valós számok halmazával, ……………… 1 pont

végtelen számosságú halmaznak nevezzük.

11./ Igaz-e, hogy az $A \wedge (A \rightarrow B)$ formula azonosan igaz? Indokolja igazságtáblával!

a.) azonosan igaz b.) nem azonosan igaz (Karikázza be a megfelelőt!) 2 pont

Az igazságtábla:

| A | B | $A \rightarrow B$ | $A \wedge (A \rightarrow B)$ |
|---|---|---|---|
| $\uparrow$ | $\uparrow$ | | |
| $\uparrow$ | $\downarrow$ | | |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | | |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | | |

13./ Legyen X:={a,b,c} Y:={1,2,3} és $R \subset X\times Y$ reláció, ahol R := { (a,1); (b,2); (c,3) }

Milyen párokat tartalmaz az $R^{-1} \subset Y \times X$ inverz reláció? 1 pont

$R^{-1}$ = ……………………………………………………………………………………

14./ Melyik állítás igaz az R relációra? (Több válasz is jó lehet, karikázza be!) 1 pont

a.) R nem függvény. b.) R injektív függvény.

c.) R szürjektív függvény. d.) R függvény, de nem injektív és nem szürjektív.

15./ Melyik állítás igaz az $R^{-1}$ inverz relációra? (Több válasz is jó lehet, karikázza be!) 1 pont

a.) $R^{-1}$ nem függvény. b.) $R^{-1}$ injektív függvény.

c.) $R^{-1}$ szürjektív függvény. d.) $R^{-1}$ függvény, de nem injektív és nem szürjektív.

16./ Melyik lépés nem igaz az alábbi levezetésben? 2 pont

$( A \vee B ) \wedge ( B \vee \neg A ) = ( B \vee A ) \wedge ( B \vee \neg A ) = B \wedge ( A \vee \neg A ) = B \wedge \uparrow = \uparrow$

a.) 1. lépés b.) 2. lépés c.) 3. lépés

d.) 4. lépés e.) minden lépés helyes

## *Irodalomjegyzék*


*[1]* ***Dringó László – Kátai Imre****:Bevezetés a matematikába*
*Tankönyvkiadó, Budapest,1988.*

*[2]* ***Bagyinszkiné*** *: Bevezetés a matematikába Példatár*
*Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.*

*[3]* ***Szelezsán János****: Matematika I.*
*LSI Oktatóközpont, 2005.*

*[4]* *Matematika példatár*
*Szerkesztette:Szelezsán János:*
*LSI Oktatóközpont, 2005.*

*[5]* ***Solt György:****Valószínűségszámítás.*
*Példatár*
*Műszaki Lönyvkiadó 1971.*